UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2500 — Livsforsikring.
Eksamensdag:	Mandag 4. desember 2006.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (5 poeng)

Bruk den Bayesianske metoden for å modellere usikkerheten av den ukjente dødsintensiteten $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ med hjelp av en sannsynlighetsvariable θ. Anta at θ er Gamma-fordelt med forventningsverdi $E[\theta] = 0.005$ og varians $Var[\theta] = 0.000005$. Antallet av observerte dødsfall er 55 og den totale risikotiden forsikringen er utsatt for er 5133 (exposure).

(i) Beregn posterior-forventningsverdien og estimer den $1-$årige dødssannsynligheten q_x.

(ii) Finn maximum likelihood estimaten $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ til $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ og sammenlign den med tilsvarende Bayes-estimaten i del (i).

Oppgave 2. (7 poeng)

Anta en portefølje som består av 3 forsikringskontrakter. De tilsvarende skadesummene S_h $h = 1, 2, 3$ (claims) er uavhengige og slik at

$$\begin{array}{lll}
\Pr(S_1 = 0) = 0.80 & \Pr(S_1 = 1) = 0.05 & \Pr(S_1 = 2) = 0.15 \\
\Pr(S_2 = 0) = 0.70 & \Pr(S_2 = 1) = 0.01 & \Pr(S_2 = 2) = 0.29 \\
\Pr(S_3 = 0) = 0.80 & \Pr(S_3 = 1) = 0.05 & \Pr(S_3 = 2) = 0.15
\end{array}$$

(Fortsettes side 2.)

(i) Bruk formelen til Panjer for å beregne den sammensatte Poisson-tilnærmingen til totalskadefordelingen av $S = \sum_{h=1}^{3} S_h$.

(ii) Beregn netto stop-loss premien $\rho(\beta) := E\left[(S-\beta)^+\right]$ for deductible $\beta = 2$ forutsatt at S har sammensatt Poissonfordeling som i del (i) ($(S-\beta)^+ = \max(0, S-\beta)$).

(iii) Anta nå at totalskadefordelingen blir tilnærmet av en normalfordeling med parametrer $\mu = E[S]$ og $\sigma^2 = Var[S]$:

a) Vis at

$$\rho(\beta) = \sigma\phi(\frac{\mu-\beta}{\sigma}) + (\mu-\beta)\Phi(\frac{\mu-\beta}{\sigma}),$$

hvor $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ og $\Phi(x)$ er standardnormal-fordeling.

Hint: Vis at $\rho(\beta) = \sigma \int_k^\infty (x-k)\phi(x)dx$ for $k = \frac{\beta-\mu}{\sigma}$ og bruk relasjonen $x\phi(x) = -\frac{d}{dx}\phi(x)$.

b) Beregn netto stop-loss premien til (ii) i dette tilfellet. Bruk tabellen til Φ (vedlegg).

Oppgave 3. (5 poeng)

Som i oppgave 1 krever vi at dødsintensiteten er konstant på tidsintervallet $(x, x+1]$. Anta at 11 liv går inn på observasjon på alder x. Dessuten går to liv inn på observasjon på alder $x+0.5$. Ett liv på alder $x+0.8$ og ett på alder $x+0.1$ forlater observasjonen . To liv dør på $x+0.7$. Beregn maximum likelihood estimaten $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ til dødsintensiteten for å estimere

$$\Pr(S \le u \mid K = 0),$$

hvor $S = T - K$, $K = [T]$ for den gjenværende levetiden $T = T(x)$.

Oppgave 4. (5 poeng)

Anta følgende livsforsikring for tre liv $(x_1), (x_2), (x_3)$ som har samme alder x ved tegning: En i kontrakten tilkjennegitt forsikringssum på $150,000$ \$ utbetales av forsikringsgiver på slutten av dødsåret, når den første dør. Summen på $275,000$ \$ utbetales ved andre dødsfallet og $350,000$ \$ ved det siste på slutten av året.

(i) Hva er netto-engangspremien til denne forsikringspremien ?

(Fortsettes side 3.)

(ii) Led ut en representasjon for netto-engangspremien med hensyn til engangspremier på det korteste av flere liv (joint life statuses).

Hint: Schuette-Nesbitt formel.

Oppgave 5. (4 poeng)

Anta en sammensatt livsforsikring som varer 3 år (3−years endowment). Ved denne forsikringsformen utbetales summen c_{k+1} på slutten av dødsåret slik at

k år	c_{k+1}	q_{x+k}
0	3	0.27
1	4	0.32
2	5	0.38

Som motytelse for denne garantien kreves en fastsatt årlige premie Π som innbetales på begynnelsen av året så lenge forsikringstakeren er i live. Effektivrenten er $i = 1/11$. Bruk ekvivalensprinsippet for å finne Π og beregn netto-premiereservene ${}_{k+1}V, k = 0, 1, 2$ til kontrakten.

Slutt

(Fortsettes side 4.)

Vedlegg: Liste med formler

a) Tetthetsfunksjonen u til Gamma-fordelingen med parametrer $\alpha, \lambda > 0$ er

$$u(y) = e^{-\lambda x}\lambda^{\alpha}\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, x \geq 0.$$

b)

$$E[Z] = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ and } Var[Z] = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

hvis Z har Gamma-fordeling.

c) Posterior-tetthetsfunksjon:

$$\widetilde{u}(y) = \frac{y^{D_x}\exp(-yE_x)u(y)}{\int_0^{\infty} t^{D_x}\exp(-tE_x)u(t)dt}.$$

d) Maximum likelihood estimat $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$:

$$\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x}.$$

D_x antall av observerte dødsfall, $E_x = \sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i)$ exposure.

e) Formelen til Panjer:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{m} j \cdot q_j \cdot f(x-j),\ x = 1, 2, 3, ...,$$

$f(x) = \Pr(S = x)$, $q_j := \sum_{h=1}^{n} q_{jh}$, $q_{jh} := \Pr(S_h = j), h = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, $q := \sum_{j=1}^{m} q_j$, $f(0) := e^{-q}$.

f)

x	$\Phi(x)$
0.45	0.673645
0.50	0.691463
0.55	0.708840

g) Rekursjonsformel:

$${}_kV + \Pi_k = v\left[c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}\right].$$

SLUTT