UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK2500 — Livsforsikringsmatematikk.
Eksamensdag:	Tirsdag, 1. desember 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 5 poeng)

Benytt deg av den Bayesianske metoden til å modellere usikkerheten av den ukjente dødsintensiteten $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ved hjelp av en sannsynlighetsvariabel θ. Anta at θ er Gamma-fordelt med forventningsverdi $E[\theta] = 0.004$ og varians $Var[\theta] = 0.000008$. Antallet av observerte dødsfall er 37 og den totale risikotiden forsikringen er utsatt for, er 3943 (exposure).

(i) Finn posterior-forventningsverdien og estimer den 1−årige døds-sannsynligheten q_x.
item[(ii)] Beregn maximum-likelihood-estimatet $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ til $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ og sammenlign det med det tilsvarende Bayes-estimatet i del (i).

Oppgave 2 (vekt 5 poeng)

Anta at kravene S_h $h = 1, 2, 3$ (claims) av en totalskadesum (total claim amount) m.h.t. en forsikringsportfølje er uavhengige og slik at

$$
\begin{array}{lll}
\Pr(S_1 = 0) = 0.69 & \Pr(S_1 = 1) = 0.09 & \Pr(S_1 = 2) = 0.22 \\
\Pr(S_2 = 0) = 0.71 & \Pr(S_2 = 1) = 0.01 & \Pr(S_2 = 2) = 0.28 \\
\Pr(S_3 = 0) = 0.82 & \Pr(S_3 = 1) = 0.11 & \Pr(S_3 = 2) = 0.07
\end{array}
$$

(i) Beregn den sammensatte Poisson-tilnærmingen til totalskadefordelingen av $S = \sum_{h=1}^{3} S_h$.

(ii) Finn netto-stop-loss-premien $\rho(\beta) := E\left[(S-\beta)^+\right]$ for deductible $\beta = 1.5$ forutsatt at S har sammensatt Poisson-fordeling som i del (i) ($(S-\beta)^+ = \max(0, S-\beta)$).

(iii) Beregn netto-excess-of-loss-premien $E[R]$ m.h.t. den sammensatte Poisson-tilnærmingen S, hvis priority $\alpha = 0.8$. Her er $R = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \alpha)^+$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 5 poeng)

Anta en sammensatt livsforsikring som varer i 4 år (4−years endowment). Ved denne forsikringsformen utbetales enten summen c_{k+1} på slutten av dødsåret $k+1$ hvis $k = 1, 2, 3$ eller E på slutten av kontraktperioden, hvis $k \geq 4$. La E være 3 og

k years	c_{k+1}	q_{x+k}
0	1	0.018
1	3	0.019
2	5	0.021
3	7	0.023

Som motytelse for denne garantien kreves årlige premier (net annual premiums) $\Pi_k = \Pi_0 \cdot (1 + 0.04 \cdot k)$, $k = 0, 1, 2, 3$ som innbetales ved begynnelsen av året innen kontraktperioden så lenge forsikringstakeren er i live. Effektivrenten er $i = 0.03$.

(i) Finn Π_0.

(ii) Beregn netto-premiereservene ${}_{k+1}V, k = 0, 1, 2, 3$ til kontrakten.

Oppgave 4 (vekt 5 poeng)

(i) Betrakt følgende tabellen av 1−år dødelighetssannsynligheter q_x (DAV-dødelighetstabell 1994 T for kvinner, Tyskland):

Age x	$1000 \cdot q_x$
30	0.689
31	0.735
32	0.783
33	0.833
34	0.897

Anta at forventningstiden av avsluttet (completed) gjenværende leveår er $e_x = 51.8$ for et liv $x = 30$ år . Finn e_{x+5}.

(ii) Anta at den gjenværende levetiden $T = T(x)$ (future life time) for $x = 30$ år er Gamma-fordelt med parametre $\lambda = 0.039$ og $\alpha = 2$. Beregn $\mathring{e}_x = E[T]$.

(iii) La $S = [T]$ være den gjenværende levetiden i dødsåret, hvor T følger Gamma-fordelingen som i Oppgave 4, (ii). Beregn forventningsverdien av S.

Oppgave 5 (vekt 5 poeng)

La $u : v$ (joint-life status) være den tilstanden som varer så lenge tilstandene u og v (av en gruppe av forsikrede) er intakte. Dessuten er tilstanden $\overline{u : v}$ (last-survivor status) aktiv, hvis minst en av u eller v er intakt. Betrakt fem liv (x_1),..., (x_5). Anta at livet (x_5) er uavhengig

(Fortsettes på side 3.)

av livene $(x_1), ..., (x_4)$ ($(x_1), ..., (x_4)$ er ikke nødvendigvis uavhengige). I tillegg skal vi anta at effektivrenten er $i = 0.02$ og at

$$\begin{aligned}
\mu_{x_{i_1}:x_{i_2}+t} &= -\log(1.02) + 3 \cdot \mu_{x_5+t},\ 1 \leq i_1 < i_2 \leq 4, \\
\mu_{x_{i_1}:x_{i_2}:x_{i_3}+t} &= -\log(1.02) + 4 \cdot \mu_{x_5+t},\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4, \\
\mu_{x_1:x_2:x_3:x_4+t} &= -\log(1.02) + 5 \cdot \mu_{x_5+t}
\end{aligned}$$

for alle t, hvor μ_{x_5+t} er dødsintensiteten av (x_5) (force of mortality) og $\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt}\log({}_tp_u)$ er feilraten av status u (instantaneous failure rate).

Sett $u = \overline{x_1 : x_2 : x_3} : x_4$. Beregn netto-engangspremien (net single premium) av en livsforsikring som utbetaler 1 på tidspunkt $t = T(x_5)$, dersom $T(u) > T(x_5)$, og null ellers. Her er $T(w)$ gjenværende levetiden av status w.

Slutt

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Formelark

a) Tetthetsfunksjon u til Gamma-fordelinga med parametre $\alpha, \lambda > 0$ er

$$u(y) = e^{-\lambda y}\lambda^{\alpha}\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, y \geq 0,$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ for } n = 1, 2, 3, ...$$

b)

$$E[Z] = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ and } Var[Z] = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

hvis Z har Gamma-fordeling.

c) Posterior-tetthetsfunksjon:

$$\widetilde{u}(y) = \frac{y^{D_x}\exp(-yE_x)u(y)}{\int_0^{\infty} t^{D_x}\exp(-tE_x)u(t)dt}.$$

d) Maximum-likelihood-estimat $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$:

$$\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x}.$$

D_x antall av observerte dødsfall, $E_x = \sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i)$ exposure.

e) Panjers formel:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{m} j \cdot q_j \cdot f(x-j), \; x = 1, 2, 3, ...,$$

$f(x) = \Pr(S = x)$, $q_j := \sum_{h=1}^{n} q_{jh}$, $q_{jh} := \Pr(S_h = j), h = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, $q := \sum_{j=1}^{m} q_j$, $f(0) := \Pr(N = 0) = e^{-q}$, hvor S er den sammansatte Poisson-tilnærminga gitt av

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

med $\Pr(X_k = j) = \frac{q_j}{q}$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, 2, 3, ...$

f) La $Y_k, k = 1, 2, 3...$ vere i.i.d slik at $E[|Y_1|] < \infty$. Dessuten la $M \in \{0, 1, 2, ...\}$ vere en tilfeldig variabel med $E[|M|] < \infty$ slik at M er uavhengig av $Y_k, k = 1, 2, 3...$I så fall er

$$E\left[\sum_{k=1}^{M} Y_k\right] = E[M]E[Y_1].$$

g) Rekursjonsformel:

$$_kV + \Pi_k = v\left[c_{k+1} \cdot q_{x+k} + \;_{k+1}V \cdot p_{x+k}\right].$$

h)

$$_xp_k = p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1}$$

i)

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1})$$