UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK2500 — Livsforsikringsmatematikk.
Eksamensdag:	Torsdag, 2. desember 2010.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La Z være nåverdien til en dødsforsikring som gir b kroner ved død for en person som er x år gammel når han tegner forsikringen. Vi antar konstant dødsintensitet $\mu_{x+t} = a$ $(t \geq 0)$. Den kontinuerlige diskonteringsrenta er δ slik at diskonteringsfaktoren er $v = \exp(-\delta)$.

a) Beregn $\mathrm{E}[Z]$ i tilfellet $a = 0.03$ og $\delta = 0.05$.

b) Skisser hvordan $\mathrm{E}[Z]$ varierer som en funksjon av δ.

c) Hva hender med $\mathrm{E}[Z]$ når $a \to 0$ og $a \to \infty$? Kommenter.

d) Regn ut $\mathrm{Var}[Z]$ i tilfellet $a = 0.03$ og $\delta = 0.05$.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven utelukkende arbeide med pensjonsordningers *brutto* forpliktelse, dvs. fremtidige utbetalinger når innbetalinger (premier) *ikke* regnes med. Anta at pensjonene begynner å løpe som forskuddsbetalinger av størrelse 1 fra og med alder l_r inntil individets død. Teknisk rente er r. La π_l være forventet nåverdi av alle fremtidige ytelser når individet er i alder l. Denne størrelsen kalles *engangspremien*.

a) Bestem matematiske uttrykk for engangspremien π_l i alder l.
[Hint: Skill mellom $l < l_r$ og $l \geq l_r$.]

Anta at et individ i alder l_0 skal betale for den fremtidige pensjonsytelsen som en engangsinnbetaling.

b) Hva blir da ekvivalensinnbetalingen (også kalt ekvivalenspremien)?

(Fortsettes på side 2.)

En vanlig situasjon ved fusjoner og oppkjøp av bedrifter er at pensjonsporteføljer må verdsettes. Anta at en portefølje med J individer i alder $l_{10}, \ldots, l_{J0}$ skal overføres fra et selskap til et annet. Deres avtalte pensjonsytelser er $s_1, \ldots, s_J$.

c) Hva er summen av verdiene av alle de fremtidige ytelsene i porteføljen?

d) Begrunn at porteføljens forventede utbetaling om k år er

$$\mathcal{X}_k = \sum_{l_{0j}+k \geq l_r} {}_k p_{l_{0j}} s_j$$

der summen løper over alle j slik at $l_{0j} + k \geq l_r$.

En av fordelene ved denne fremgangsmåten er at den tillater alternative diskonteringsregimer. De to siste spørsmålene handler om dette.

e) Gjør kort rede for forskjellen mellom diskontering med teknisk rente r og med markedsrenten y_k.

Anta at markedsrenten følger modellen

$$y_k = r(1+\eta)e^{-\sigma^2/2+\sigma\varepsilon_k}$$

der η og σ er positive parametre og ε_k er normal $(0,1)$. Da er $E(y_k) = r(1+\eta) > r$ (ikke bevis dette).

f) Hva er sannsynligheten for at du får høyere verdifastsettelse av k'te forpliktelse $\mathcal{X}_k$ med markedsrenten enn med fast, teknisk rente? Uttrykk svaret ved hjelp av r, η, σ og normalfordelingsintegralet.

Oppgave 3

Anta at en portefølje består av 3 forsikringskontrakter. De tilsvarende skadesummene S_h $h = 1, 2, 3$ (claims) er uavhengige og slik at

$$\begin{array}{lll}
\Pr(S_1 = 0) = 0.72 & \Pr(S_1 = 1) = 0.08 & \Pr(S_1 = 2) = 0.20 \\
\Pr(S_2 = 0) = 0.77 & \Pr(S_2 = 1) = 0.09 & \Pr(S_2 = 2) = 0.14 \\
\Pr(S_3 = 0) = 0.83 & \Pr(S_3 = 1) = 0.05 & \Pr(S_3 = 2) = 0.12
\end{array}$$

(i) Beregn den sammensatte Poisson-tilnærmingen til totalskadefordelingen av $S = \sum_{h=1}^{3} S_h$.

(ii) Beregn netto stop-loss premien $\rho(\beta) := E\left[(S-\beta)^+\right]$ for deductible $\beta = 2$ forutsatt at S har sammensatt Poissonfordelingen som i del (i) ($(S-\beta)^+ = \max(0, S-\beta)$).

(iii) Finn verdien til variansen $Var[S]$ for den sammensatte Poissonfordelingen av S.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

Anta vi betrakter en mann som har alder x. Det er vanlig å anta en dødsintensitet på formen $\mu_{x+t} = a + b \cdot c^{x+t}$. La T_x være mannens gjenstående levetid. Anta til å begynne med at $b = 0$ slik at dødsintensiteten er $\mu_{x+t} = a$ som er konstant.

a) Finn ${}_tp_x$ uttrykt ved a. (${}_tp_x$ er sannsynligheten for at en x-åring skal overleve t år.)

b) Hva er tetthetsfunksjonen for T_x uttrykt ved a? Skisser tetthetsfunksjonen for T_x.

Anta nå at $a = 1/81$.

c) Hva er $\mathrm{E}[T_0]$?

d) Hva er $\mathrm{E}[T_{50}]$?

Anta at vi betrakter et ektepar der mannens alder er x og kvinnens er y. Mannen antas å ha dødsintensitet μ^M_{x+t} og kvinnen μ^K_{y+t}. I utgangspunktet er det nå ingen restriksjoner på μ^M og μ^K. Deres gjenstående levealdre er T^M_x og T^K_y. Mannens og kvinnens livsløp antas uavhengige.

e) Argumenter for at sannsynligheten for at kvinnen overlever mannen er gitt ved

$$\mathrm{P}(T^K_y > T^M_x) = \int_0^\infty \mu^M_{x+t} \cdot {}_tp^M_x \cdot {}_tp^K_y \, dt.$$

Anta videre at μ^M_{x+t} og μ^K_{y+t} er slik at

$$\frac{\mu^M_{x+t}}{\mu^K_{y+t}} = k, \qquad \forall t \geq 0, \tag{1}$$

der k er en konstant (dvs. brøken i (1) avhenger ikke av t).

f) Finn $\mathrm{P}(T^K_y > T^M_x)$ uttrykt ved k.

SLUTT