Karakteristiske funksjoner

Grete U. Fenstad

Høsten 2003

Vi skal her definere og presentere noen fakta om karakteristiske funksjoner, men vi vil først minne om et par allerede kjente funksjoner.

La X være en stokastisk variabel, da er

$G_X(t) = E(t^X)$ den *(sannsynlighets-)genererende* funksjon til X, og
$M_X(t) = E(e^{tX})$ den *momentgenererende* funksjon til X.

Disse to genererende funksjoner har blant annet egenskapene:

- den genererende funksjon karakteriserer sannsynlighetsfordelingen til X
- $G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$, hvis X_1 og X_2 er uavhengige, og tilsvarende for den momentgenererende funksjon.

Dette gjelder under forutsetning av at funksjonene eksisterer. Den sannsynlighetsgenererende funksjon brukes helst for stokastiske variable som antar ikke-negative, heltallige verdier, og da eksisterer den i alle fall for alle $t \in [-1, +1]$. Den momentgenererende funksjon derimot behøver ikke å eksistere for andre verdier enn $t = 0$ (eksempel: X er Cauchy-fordelt). Det ville være ønskelig med en transformasjon som uansett sannsynlighetsfordeling til X eksisterer for alle t.

Definisjon Den *karakteristiske* funksjon til X er definert ved

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX)),$$

der $i = \sqrt{-1}$.

Den karakteristiske funksjonen har blant annet følgende egenskaper:

1. $\phi_X(t)$ eksisterer for alle $t \in <-\infty, +\infty>$
2. ϕ_X karakteriserer sannsynlighetsfordelingen til X
3. $\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \phi_{X_2}(t)$, hvis X_1 og X_2 er uavhengige
4. $\phi_{aX+b}(t) = \phi_X(at)e^{itb}$

5. $\phi_X(0) = 1$ og $|\phi_X(t)| \leq 1$ for alle t
6. ϕ_X er uniformt kontinuerlig
7. $\overline{\phi_X(t)} = \phi_X(-t)$ er den karakteristiske funksjon til $-X$
8. $|\phi_X(t)|^2$ er en karakteristisk funksjon
9. sannsynlighetsfordelingen til X er symmetrisk, dvs. $X \sim -X$, hvis og bare hvis ϕ_X er reell
10. hvis ϕ_X er integrabel, har X sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t)\, dt$$

11. la $X_1, X_2, \cdots$ være stokastiske variable med karakteristiske funksjoner $\phi_1, \phi_2, \cdots$:
    - hvis $X_n \xrightarrow{L} X$, vil $\phi_n(t) \to \phi_X(t)$
    - hvis $\phi_n(t) \to \phi(t)$ for alle t **og** ϕ er kontinuerlig i 0, så vil $X_n \xrightarrow{L} X$ med $\phi_X(t) = \phi(t)$
12. $E(|X|^k) < \infty$ medfører
    - $\phi_X^{(k)}(t)$ eksisterer og er kontinuerlig
    - $\phi_X^{(k)}(t) = E((iX)^k e^{itX})$
    - $\phi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$
    - $\phi_X(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \phi_X^{(k)}(0) \frac{t^j}{j!} + o(|t|^k)$

    der $\phi_X^{(k)}(t)$ er den k-te deriverte av $\phi_X(t)$ med hensyn på t

Punktene 2., 10., 11. og 12. skal vi godta uten bevis.

Oppgave 1 Vis punktene 1. og 3. til 9.

Oppgave 2 Finn den karakteristiske funksjonen til X når sannsynlighetsfordelingen til X er:

a) $\Pr(X = a) = 1$. Merk spesielt tilfellet $a = 0$.

b) $\Pr(X = a) = 1 - \Pr(X = -a) = 1/2$

c) $\Pr(X = 1) = 1 - \Pr(X = 0) = p$

d) X er binomisk fordelt (n, p)
(**Vink**: Det enkleste er å nytte punkt c) sammen med en generalisering av egenskapen 3.)

e) X er Poisson-fordelt med parameter λ

f) X er $\mathrm{N}(0,1)$
(**Svar**: $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$)

g) X er $\mathrm{N}(\xi, \sigma^2)$

Oppgave 3 La X_1 og X_2 være uavhengige stokastiske variable. Finn sannsynlighetsfordelingen til $X_1 + X_2$ når

a) X_1 er binomisk (n, p) og X_2 er binomisk (m, p)

b) X_1 og X_2 er Poisson-fordelte med parametre henholdsvis λ og μ

c) X_1 er $\mathrm{N}(\xi, \sigma^2)$ og X_2 er $\mathrm{N}(\mu, \tau^2)$

Oppgave 4 La $X_1, X_2, \cdots, X_n$ være uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable med karakteristisk funksjon $\phi(t)$. Vis at de karakteristiske funksjonene til $\sum_{i=1}^n X_i$ og $\sqrt{n}\bar{X}$ er henholdsvis $(\phi(t))^n$ og $(\phi(t/\sqrt{n}))^n$.

Oppgave 5 La $X_1, X_2, \cdots, X_n$ være uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable med sannsynlighetsfordelingen i Oppgave 2 b).

a) Finn den karakteristiske funksjon til $\sqrt{n}\bar{X}$

b) Nytt det andre punktet i egenskapen 11. til å finne grensefordelingen til $\sqrt{n}\bar{X}$ når $n \to \infty$.
(**Vink**: $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \cdots + (-1)^n x^{2n}/(2n)! + \cdots$)

Oppgave 6 Funksjonen $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ er en karakteristisk funksjon og integrabel.

a) Hvilken sannsynlighetstetthet har X?

b) La $X_1, X_2, \cdots, X_n$ være uavhengige og identisk fordelte med denne sannsynlighetsfordelingen. Hva er sannsynlighetsfordelingen til $\bar{X}$?

Oppgave 7 La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

a) Hva er den karakteristiske funksjon til X?

b) Nytt det andre punktet i egenskapen 11. til å finne grensefordelingen til $\sqrt{n}\bar{X}$ når $n \to \infty$.