Når eksisterer *lim*?

Grete U. Fenstad

Høsten 1999, revidert høsten 2003 og høsten 2007 (IH).

I emnet STK 4010 Asymptotisk teori vil det stadig bli behov (i) for å vise at en reell tallfølge konvergerer mot en grense og (ii) for å finne denne grensen. "The Sqeeze Law", kjent fra tidligere matematikkemner, kan brukes i mange tilfelle, men den fører ikke alltid fram. Det vil derfor være behov for å innføre nye begrep $\limsup_{n\to\infty}$ og $\liminf_{n\to\infty}$.

Følgende definisjoner skulle være velkjente

Definisjon 1 Tallfølgen $a_n, n = 1, 2, \ldots$ konvergerer mot en endelig grense a hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes et tall $n_0 = n_0(\varepsilon)$ slik at

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad n > n_0.$$

Med symboler skriver vi:

$$a_n \to a \quad \text{når} \quad n \to \infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definisjon 2 Tallfølgen $a_n, n = 1, 2, \ldots$ konvergerer mot ∞ hvis det til enhver stor M finnes et tall $n_0 = n_0(M)$ slik at $a_n > M \quad \text{for alle} \quad n > n_0$.

Med symboler:

$$a_n \to \infty \quad \text{når} \quad n \to \infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

En tilsvarende definisjon gjelder for $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Dessverre eksisterer ikke $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ for alle tallfølger $a_n, n = 1, 2, \ldots$. En må derfor være forsiktig med å bruke $\lim_{n\to\infty}$ hvis en ikke allerede har verifisert at grensen eksisterer. Av den grunn er det hensiktsmessig å innføre grensebegrepene,

$$\limsup_{n\to\infty} \quad \text{og} \quad \liminf_{n\to\infty}$$

som ifølge Definisjon 3 nedenfor alltid eksisterer.

Definisjon 3 $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$, A endelig, hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes et tall $N_0 = N_0(\varepsilon)$ slik at

1. for alle $n > N_0$ er $a_n < A + \varepsilon$ og
2. uendelig mange $a_n > A - \varepsilon$

Hvis 1. ikke er oppfylt for noen A, settes $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Hvis 1. er oppfylt for en eller annen A, men ikke 2. for noen A, settes $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Denne definisjonen dekker alle mulige reelle tallfølger, så $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$ er nå alltid definert.

Oppgave 1 Definer $B = \liminf_{n\to\infty}(a_n) \overset{\text{def}}{=} -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$.

Vis at hvis $|B| < \infty$, så vil det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes et tall $N_0 = N_0(\varepsilon)$ slik at

3. for alle $n > N_0$ er $a_n > B - \varepsilon$ og
4. uendelig mange $a_n < B + \varepsilon$

For hvilke tallfølger er $B = \infty$ og for hvilke er $B = -\infty$?

Nå følger en alternativ definisjon av lim.

Setning 1 Tallfølgen $a_n, n = 1, 2, \ldots$ har $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ hvis og bare hvis

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

Bevis La $|a| < \infty$.

Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Det vil si at

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

bare n er stor nok. Men ifølge definisjonen av lim sup og lim inf må da

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

Anta så at $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$. Ifølge definisjonen av lim sup (1.) og definisjonen av lim inf (3.) vil vi da ha at $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ bare n er stor nok, altså $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Oppgave 2 Gjennomfør beviset for Setning 1 når $a = \pm\infty$.

Det finnes flere enkle og nyttige ulikheter for operasjoner med lim sup og lim inf:

Setning 2 La $a_n, n = 1, 2, \ldots$ og $b_n, n = 1, 2, \ldots$ være to vilkårlige tallfølger.

1. $\liminf_n(a_n) \leq \limsup_n(a_n)$
2. $\liminf_n(a_n)+\liminf_n(b_n) \leq \liminf_n(a_n+b_n) \leq \liminf(a_n)+\limsup_n(b_n) \leq \limsup_n(a_n+b_n) \leq \limsup_n(a_n)+\limsup_n(b_n)$
3. Hvis $a_n \leq b_n, n = 1, 2, \ldots$, så er

$$\liminf_n(a_n) \leq \liminf_n(b_n) \quad \text{og} \quad \limsup_n(a_n) \leq \limsup_n(b_n)$$

Bevis

1. Sett $B = \liminf_n(a_n)$ og $A = \limsup_n(a_n)$, og anta $A < B$. Bare n er stor nok er

$$\text{alle} \quad a_n < A + \varepsilon \qquad \text{og} \qquad \text{alle} \quad a_n > B - \varepsilon.$$

Men dette er umulig hvis f. eks. $\varepsilon = (B - A)/3$ (tegn figur!). Altså må $A \geq B$

2. Vi beviser den første ulikheten, beviset for de andre er tilsvarende. Sett

$$A = \liminf_n(a_n), \quad B = \liminf_n(b_n) \quad \text{og} \quad C = \liminf_n(a_n + b_n).$$

Anta $A + B > C$. Vi kan velge $\varepsilon = [(A + B) - C]/4 > 0$, og vet at bare n er stor nok er

$$\text{alle} \quad a_n > A - \varepsilon \qquad \text{og} \qquad \text{alle} \quad b_n > B - \varepsilon,$$

det vil si at alle $a_n+b_n > A+B-2\,\varepsilon$. Samtidig skal uendelig mange $a_n+b_n < C-\varepsilon$, men dette er umulig (tegn ny figur!). Altså må $A + B \leq C$.

3. Sett $\liminf_n a_n = A$ og $\liminf_n b_n = B$. Anta $A > B$ og velg $\varepsilon = (A-B)/3$. Vi vet at bare n er stor nok er

$$\text{alle} \quad a_n > A - \varepsilon \qquad \text{og} \qquad \text{uendelig mange} \quad b_n < B + \varepsilon,$$

men dette er umulig siden $a_n \leq b_n$ for alle n. Altså må $A \leq B$. Den andre ulikheten vises på tilsvarende måte.

Oppgave 3 Fullfør beviset for punktene 2. og 3. i Setning 2.

Oppgave 4 Finn eksempel på tallfølger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ der $a_n \leq b_n$ for alle n men $\limsup_n(a_n) \geq \liminf_n(b_n)$.

Oppgave 5 Vis at hvis både $\lim_n a_n = a$ og $\lim_n b_n = b$ eksisterer, så eksisterer også $\lim_n(a_n + b_n)$ og er lik $a + b$.

Oppgave 6 Vis at hvis $a_n > 0$ og $b_n > 0$ for alle n, så er

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n) \cdot \limsup_{n\to\infty}(b_n)$$

og

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(a_n) \cdot \liminf_{n\to\infty}(b_n)$$

Til slutt følger noen eksempler på hvordan disse resultatene kan anvendes.

Eksempel 1 Anta $a_n \le b_n \le c_n$ for alle n og at $\lim_n a_n$ og $\lim_n c_n$ eksisterer. Da er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Hvis $\lim_n a_n = \lim_n c_n = b$, følger så at $\lim_n b_n$ eksisterer og er lik b. (Dette siste resultatet er Squeeze Law.)

Eksempel 2 Ifølge Oppgave 6 er

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n) \cdot \liminf_{n\to\infty}(b_n) \le \liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) \cdot \limsup_{n\to\infty}(b_n)$$

hvis alle $a_n > 0$ og alle $b_n > 0$. Hvis grensene til $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ også eksisterer, følger at $\lim_n(a_n \cdot b_n)$ eksisterer og er lik $\lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

Eksempel 3 La $\{a_n\}$ være en tallfølge og sett $\sigma_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. Det er relativt enkelt å vise at hvis $\lim_n a_n$ eksisterer så vil også $\lim_n \sigma_n$ eksistere og være lik $\lim_n a_n$.

Finn eksempel der det omvendte ikke gjelder.

Men det kan vises at vi alltid har

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \le \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$