Oppgaver, STK4040, uke 40

2. oktober 2005

Oppgave 1

Anta at den stokastiske vektoren $\boldsymbol{x}$ har dimensjon 5 og at den kan skrives som $\boldsymbol{x} = \mathrm{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}$, der $\boldsymbol{v}$ er en stokastisk vektor med dimensjon 2, A er en fast matrise og $\boldsymbol{e}$ er en stokasisk vektor av samme dimensjon som $\boldsymbol{x}$, uavhengig av $\boldsymbol{v}$. La matrisen A være definert som

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektoren $\boldsymbol{e}$ antas å ha $\mathsf{E}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{0}$ og $\Phi = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{e})$ antas å være diagonal med verdien 0.1 på diagonalen. Den stokastiske vektoren $\boldsymbol{v}$ antas også å ha forventning $\mathbf{0}$ og $\Theta = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Skriv opp kovariansmatrisen til $\boldsymbol{x}$ (Σ). Vis at kolonnene i A er egenvektorer til Σ.

Anta at $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{e}$ er normalfordelte, simuler 15 uavhengige observasjoner av vektoren $\boldsymbol{x}$ og plasser dem i en 15 ganger 5 datamatrise X.

Lag en prinsipalkomponentanalyse av datamatrisen X. Plott de to første skårene (score-plot) og de to første ladningsvektorene (ladningsplott). Sammenlign ladningsvektorene med matrisen A. Ser du noen likhet? Forskjeller? Kommenter!

Oppgave 2

Anta at vi har en datamatrise X. La spektraldekomposisjon av $\mathrm{X}^t\mathrm{X}$ være lik VLV^t. Vis at den inverse til $\mathrm{X}^t\mathrm{X}$ (hvis den eksisterer) kan skrives som $\mathrm{VL}^{-1}\mathrm{V}^t$. Hvordan ser L^{-1} ut?

Oppgave 3

La $\boldsymbol{x} \sim N_2(\mu, \Sigma)$ og $\boldsymbol{y} \sim N_2(\nu, \Sigma)$, der $\mu = (0,0)^t$, $\nu = (1,1)^t$ og $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Trekk $m = 13$ observasjoner av $\boldsymbol{x}$ og $n = 17$ observasjoner av $\boldsymbol{y}$, og gjør en (to-utvalgs) Hotelling T^2-test for å teste hypotesen $H_0 \colon \mu = \nu$ mot den alternative hypotesen $H_A \colon \mu \neq \nu$.