Oppgaver, STK4040, uke 43

23. oktober 2005

Oppgave 1: «Fyll ut seksjon 6.6.3»

I denne oppgaven skal vi «fylle hullene» i seksjon 6.6.3.
(Hint: bruk seksjon A.2.5.)

a)

Vis at med modellantagelsene for ligning (6.1.1) (vi trenger ikke antagelsen om normalfordeling), så er $V(\mathrm{U}^V) = \Sigma \otimes \mathrm{I}_n$.

b)

Vis at OLS-estimatet av B^V er det samme som GLS-estimatet gitt i ligning (6.6.11). (Vi trenger ikke at $\Sigma = \mathrm{I}$, slik teksten antyder.)

c)

Vis at MLE-estimatet av B i ligning (6.1.1) er ekvivalent med $\hat{\mathrm{B}}^V$ (dvs. at hvis vi stabler kolonnene i MLE-estimatet, får vi $\hat{\mathrm{B}}^V$).

Oppgave 2

La X være en $n \times p$-matrise av rang r, og $\boldsymbol{y}$ en n-vektor. Anta at både X og $\boldsymbol{y}$ er sentrerte. La $\mathrm{X}^t\mathrm{X} = \mathrm{VLV}^t$ være egenverdidekomposisjonen av $\mathrm{X}^t\mathrm{X}$, med egenverdier $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r > l_{r+1} = \cdots = 0$. (Hvis $r = p$, er alle egenverdiene positive.) La L^- være en $p \times p$ diagonalmatrise med $1/l_1$, $1/l_2$, $\ldots$, $1/l_r$, 0, $\ldots$, 0 som diagonalelementer.

Vis at uansett om $r = p$ eller $r < p$ (f.eks. hvis $p > n$), så er

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{VL}^-\mathrm{V}^t\mathrm{X}^t\boldsymbol{y} \tag{1}$$

en løsning av normalligningene $\mathrm{X}^t\mathrm{X}\beta = \mathrm{X}^t\boldsymbol{y}$