Stk 4070 våren 2005: Oppgaver til 25.02.05

Oppgave 1.

Vi skal se på en hierarkisk eller nøstet modell, der en indeks j er nøstet inn i en annen indeks i, og en tredje indeks k er nøstet inn i j. Eksempler: I et høsteforsøk kan vi ha ruter innenfor høstemaskiner, og lass innenfor ruter. I en undersøkelse av grisunger kan vi ha unger innenfor kull og målinger innenfor grisunger. Vi ser på det balanserte tilfellet, der i tar verdiene $1, ..., a$, j tar verdiene $1, ..., b$ for hver i, og k tar verdiene $1, ..., n$ for hver i og j.

Vi vil se på tre forskjellige modeller:

1) Fast modell:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + e_{ijk};\ \sum_i \alpha_i = 0,\ \sum_j \beta_{ij} = 0\ for\ alle\ i.$$

2) Blandet modell:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_{ij} + e_{ijk};\ \sum_i \alpha_i = 0,\ b_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2).$$

3) Tilfeldig modell:

$$X_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk};\ a_i \sim N(0, \sigma_A^2),\ b_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2).$$

Alle tilfeldige effekter er uavhengige, og i alle modellene er $e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$.

a) Diskuter ut fra et eksempel de konkrete situasjonene som kan føre til hver av modellene.

For alle tre modeller defineres kvadratsummene:

$$SSA = bn \sum_i (\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X})^2,$$

$$SSB = n\sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{i\cdot\cdot})^2,$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{ij\cdot})^2.$$

b) Vis at $SSA + SSB = SS1 = n\sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X})^2$, og at $SSB + SSE = SS2 = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{i\cdot\cdot})^2$.

(Hint: Ved n tall y_j er

$$\sum_j (y_j - r)^2 = \sum_j (y_j - \bar{y} + \bar{y} - r)^2 = \sum_j (y_j - \bar{y})^2 + n(\bar{y}_j - r)^2.)$$

c) Vis at SSA og SSB er uavhengige og at SSB og SSE er uavhengige (under hver av modellene).

d) Ved å sammenligne med enveis variansanalyse, finn hvor mange frihetsgrader hver av disse kvadratsummene får.

e) Ved å sette inn modellen, finn forventningen til hver av middelkvadratsummene for modell 3, og forventningen til MSA for modellene 1 og 2.

f) Hvordan vil du teste $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_a = 0$ i modellene 1) og 2) og $H_0 : \sigma_A^2 = 0$ i modell 3)?

g) Anta i modell 1) at $a = 5$, og at forsøksleddene som svarer til effekten α_i består av to grupper behandlinger $1, 2$ og $3, 4, 5$. Anta dessuten at behandlingene 4 og 5 er beslektet. Sett opp 4 naturlige ortogonale kontraster for denne situasjonen, og fortell hvordan en kan sette opp 95% konfidensintervaller for hver av kontrastene.

h) Løs tilsvarende oppgave for modell 2).

i) Hvordan kan varianskomponentene σ_A^2, σ_B^2 og σ^2 estimeres forventningsrett i modell 3)?

Oppgaver til 04.03.05

Oppgave 2.1 s. 44-45 i Fitzmaurice, Laird og Ware. Dataene finnes på www.biostat.harvard.edu/~fitzmaur/ala.