

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

- Eksamen i: STK4510 — Innføring i finans-  
matematiske metoder og teknikker
- Eksamensdag: Torsdag 2. desember 2004.
- Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.
- Oppgavesettet er på 2 sider.
- Vedlegg: Ingen.
- Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett  
før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1.

- a) La  $S_t = S_0 \exp(\alpha t + \sigma B_t)$  der  $B_t$  er en Brownsk bevegelse, og  $\alpha, \sigma$  er to konstanter. Finn  $dS_t$  ved bruk av Itô's formel.
- b) Hva er den risikonøytrale dynamikken til  $dS_t$ ?
- c) En *digitalopsjon* er en opsjon som gir eieren 1 kr. hvis aksjekursen ligger over et nivå  $K$  på innløsnings tidspunktet  $T$ , mens den gir null hvis aksjekursen er lavere. Argumenter for at prisen på denne opsjonen er
- $$P_t = e^{-r(T-t)} \mathcal{Q} \left[ S_T^{t, S_t} > K \right]$$
- der  $\mathcal{Q}$  er den risikonøytrale sannsynligheten.
- d) Regn ut den arbitrasjefrie prisen på tidspunkt  $t$ ,  $P_t$ , på digitalopsjonen.
- e) Forklar hva vi mener med en hedge/replikerende portefølje til en opsjon. Finn  $\partial P_t / \partial S_t$  for digitalopsjonen, og forklar hva denne betyr i den replikerende porteføljen
- f) Hvordan kan du lage arbitrasje hvis markedet handler i digitalopsjonen for en pris som er høyere enn  $P_t$ .

(Fortsettes side 2.)

## Oppgave 2.

- a) La dynamikken til prosessen  $X_t$  være gitt ved

$$dX_t = -X_t dt + dB_t$$

Vis at

$$X_T^{t,y} = y \exp(-(T-t)) + \exp(-T) \int_t^T \exp(s) dB_s$$

der  $X_T^{t,y}$  betyr at prosessen starter i  $y$  på tid  $t$ .

- b) Vis at  $X_T^{t,y}$  er normalfordelt, med forventning lik  $y \exp(-(T-t))$  og varians lik  $0.5(1 - \exp(-2(T-t)))$ . Hva skjer med  $X_T^{t,y}$  når  $T \rightarrow \infty$ ?

Definer prosessen  $S_t = \exp(X_t)$ . Dette er en prosess som er mye brukt som modell for spotprisen per fat olje. Vi skal i resten av denne oppgaven se på prising av såkalte forwardkontrakter i oljemarkedet.

- c) En forward på olje er en kontrakt der selgeren leverer ett fat olje til et avtalt tidspunkt til eieren av kontrakten. Eieren betaler for leveransen tilsvarende den prisen som ble avtalt da kontrakten ble inngått. Anta at kontrakten ble inngått på tid  $t$ , og leveransen finner sted på tid  $T > t$ . *Forwardprisen*, som vi noterer  $f_t(T)$ , er definert som den avtalte prisen på tid  $t$  som skal betales på oljeleveransen ved levering på tid  $T$ . Hva vil eieren av forwardkontrakten tjene eller tape på avtalen?

Fra arbitrasjeteorien i kurset vårt vet vi at prisen på et betinget krav kan skrives som den neddiskonterte forventete utbetalingen av kravet under den risikonøytrale sannsynligheten. I oljemarkedet er det slik at det kan være vanskelig å handle olje på spotmarkedet for å hedge et betinget krav siden det koster mye for eksempel å lagre olje. Derfor så priser man ofte kontraktene med kun å bruke den vanlige forventningen, og ikke en risikonøytral.

- d) Finn forwardprisen uttrykt ved en betinget forventning, når du bruker at renten er konstant og at kontrakten koster null når den inngås på tid  $t$ . Det er naturlig å anta at  $f_t(T)$  er tilpasset. Hvorfor er  $f_t(T)$  en martingal?
- e) Ved Markovegenskapen til prosessene  $S_t$  og  $X_t$ , kan vi skrive forwardprisen som

$$f_t(T) = E [S_T^{t,x}]_{x=S_t}$$

Regn ut  $f_t(T)$ . Hva vil prisen på forwarden være når  $T \rightarrow \infty$ ?

- f) Finn dynamikken  $df_t(T)$  til  $f_t(T)$ .

SLUTT