

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK4510 — Innføring i finans- matematiske metoder og teknikker
Eksamensdag:	Mandag 3. desember 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på	2 sider.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La S_t være en geometrisk Brownsk bevegelse med dynamikk

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Her er B_t en Brownsk bevegelse, og $\alpha, \sigma > 0$ to konstanter.

- Bruk Itos formel til å finne dynamikken til S_t^k , der k er et naturlig tall, og vis at denne blir en geometrisk Brownsk bevegelse.
- La Q være den risikonøytrale sannsynligheten og $r > 0$ den risikofrie renten. Finn den risikonøytrale dynamikken til S_t og S_t^k .
- Vis at $e^{-rt} S_t^k$ ikke er en Q -martingal så lenge $k \neq 1$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2

La X_t være gitt ved dynamikken

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$$

der α, σ begge er positive konstanter, og B_t er en Brownsk bevegelse.

a) Vis at

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s$$

der X_0 er initialverdien til X_t .

b) La $S_t = \exp(X_t)$, og definer de α -justerte avkastningene til S_t som

$$A_t := \ln(S_t) - e^{-\alpha} \ln(S_{t-1}),$$

der $t = 1, 2, \dots$. Vis at A_t er uavhengige normalfordelte stokastiske variable, og finn forventning og varians til A_t .

Oppgave 3

La S_t være aksjekursdynamikken, og $r > 0$ den risikofrie renten.

- a) Begrunn hvorfor forwardprisen på en kontrakt som inngås på tid t og med levering av aksjen på tid τ , er gitt som $f(t, \tau) = e^{r(\tau-t)} S_t$.
- b) La S_t følge en geometrisk Brownsk bevegelse

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

der α og σ er to konstanter. Bruk Itos formel til å finne dynamikken til $f(t, \tau)$, der vi betrakter forwardprisen som en stokastisk prosess i t . Hva blir den risikonøytrale dynamikken til $f(t, \tau)$?

- c) La $T < \tau$ være innløsningstidspunktet for en opsjon skrevet på differansen mellom forwardprisen $f(T, \tau)$ og aksjekursen S_T . Opsjonen betaler $f(T, \tau) - S_T - K$ sålenge denne er positiv, og ingenting ellers. K er her en konstant. Vis at utbetalingen fra denne opsjonen er lik $\exp(r(\tau - T)) - 1$ ganger utbetalingen fra en kjøpsopsjon på aksjen med strike $K/(\exp(r(\tau - T)) - 1)$ og innløsningstid T . Bruk Black & Scholes formel til å uttrykke prisen på opsjonen.

SLUTT