

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

- Eksamen i: STK4510 — Innføring i finans-
matematiske metoder og teknikker.
- Eksamensdag: Mandag 1. desember 2008.
- Tid for eksamen: 9.00 – 12.00.
- Oppgavesettet er på 2 sider.
- Vedlegg: Ingen.
- Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver teller likt.

Oppgave 1

La B_t være en Brownsk bevegelse.

- Vis at B_t er Ito integrabel på et interval $[0, T]$.
- Bruk Itos formel til å finne $\int_0^T B_t dB_t$.
- Finn forventning og varians til Ito integralet i **b)**. Er integralet en normalfordelt variabel?

Oppgave 2

- Definer en martingal.
- Vis at $M_t = B_t^2 - t$ er en martingal ved å bruke definisjonen.
- Formuler martingalrepresentasjonsteoremet. Finn en Ito integrabel prosess X_t slik at martingalrepresentasjonsteoremet gjelder for M_t som gitt i **b)**.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3

La en aksje ha en prisprosess gitt ved

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

der μ og σ er konstanter, og B_t er en Brownsk bevegelse. Videre, la r være den risikofrie renten som vi antar konstant. Betrakt en opsjon som betaler 1 krone på tid T hvis $0 < a \leq S_T \leq b$, der $a < b$ er to konstanter.

- Finne den arbitrasjefrie prisen til opsjonen på tid t , der $0 \leq t \leq T$.
- Beregn antallet aksjer du må holde på tidspunkt t for å replikere opsjonen.

Oppgave 4

La X_t være en stokastisk prosess som er gitt ved dynamikken

$$dX_t = -\frac{1}{2}\theta_t^2 dt - \theta_t dB_t$$

der B_t er en Brownsk bevegelse og θ_t er en Ito integrabel prosess som er begrenset.

- Bruk Itos formel til å finne dM_t , der $M_t = \exp(X_t)$.
- Bruk Novikovs betingelse for å vise at M_t er en martingal, det vil si, at $E[M_t] = 1$.
- La

$$dS_t = \mu(t, S_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

der $\sigma > 0$ er en konstant og $\mu(t, x)$ er en begrenset kontinuerlig funksjon. Finn en sannsynlighet Q og en Q -Brownsk bevegelse W_t slik at $\exp(-rt)S_t$ er en Q -martingal, der $r > 0$ er den risikofrie konstante renten. Bruk **a)** og **b)** til å verifisere at Q er en sannsynlighet.

SLUTT