UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK4510 — Innføring i finansmatematiske metoder og teknikker
Eksamensdag:	Onsdag 1. desember, 2010.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgaver teller likt.

Oppgave 1

a) Formuler den en-dimensjonale Ito formel.
b) Finn dynamikken til $B^3(t)$, der B er en Brownsk bevegelse.
c) Løs den stokastiske differensiallikningen

$$dX(t) = -2X(t)\,dt + dB(t)\,.$$

Oppgave 2

a) Definer klassen av Ito integrable prosesser, og vis at $B^2(t)$ er Ito integrabel. Her, B er en Brownsk bevegelse.
b) Finn $\int_0^t B^2(s)\,dB(s)$ *uten* å bruke definisjonen av Ito integralet.

Oppgave 3

a) Definer en martingal med hensyn på $\mathcal{F}_t$, filtrasjonen til Brownsk bevegelse. Er $B(t)$, en Brownsk bevegelse, en martingal? Begrunn svaret.
b) Formuler martingal representasjonsteorem. Er

$$X(t) = \int_0^t e^{-2(t-s)}\,dB(s)$$

en martingal? Begrunn svaret.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

Betrakt et marked gitt av en aksje og et risikofritt verdipapir (bankkonto). La aksjekursen være gitt ved en geometrisk Brownsk bevegelse

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dB(t)$$

der μ og $\sigma > 0$ er konstanter og B er en Brownsk bevegelse definert på et sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Den risikofrie renten er konstanten $r > 0$.

a) Bruk Itos formula til å vise at

$$S(t) = S(0) \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t) \right)$$

b) Forklar hvordan du konstruerer filtrasjonen $\mathcal{F}_t$ generert av $B(t)$.

c) Hva betyr det at en sannsynlighet Q er ekvivalent med P? Formuler Girsanovs teorem, og anvend dette til å finne en sannsynlighet Q slik at $\exp(-rt)S(t)$ blir en Q-martingal.

d) La X være en $\mathcal{F}_T$-målbar stokastisk variable som gir utbetaling fra et derivat (eller betinget krav) på aksjen S. Utled prisen på tid t, $P(t)$, til dette derivatet.

e) Anta $0 < t_t < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \leq T$ for et gitt naturlig tall n. Betrakt en geometrisk asiatisk opsjon med utbetaling

$$X = \max\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right)$$

for en konstant "strike"$K > 0$. Finn en formel for prisen $P(0)$ ved tid 0.

SLUTT