UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK4510 — Innføring i finansmatematiske metoder og teknikker
Eksamensdag:	Torsdag 4. desember 2014
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (10 poeng)

Betrakt NASDAQ100-indeksdata (på daglig basis) fra tidsperioden 11/04/2014 til 11/11/2014:

Date	Close
11/04/2014	4156.23
11/05/2014	4153.27
11/06/2014	4164.08
11/07/2014	4160.50
11/10/2014	4175.95
11/11/2014	4187.16

Anta at dynamikken til NASDAQ100-verdier er modellert via følgende prosessen

$$S(t) = x \exp(\mu t + \sigma B_t), 0 \leq t \leq T,$$

der B_t er en 1−dimensjonal Brownsk bevegelse og $x > 0$, $\sigma > 0$, μ er konstanter.

Bruk dataene ovenfor til å beregne maksimum-likelihood-estimatorene til μ og σ for $\Delta t = 1$ dag på daglig basis (Du trenger ikke å utlede maksimum-likelihood-estimatorene).

Oppgave 2. (10 poeng)

Betrakt den 2−dimensionale Black-Scholes-modellen for aksjepriser $S_i(t), i = 1, 2$ gitt ved

$$dS_i(t) = \alpha_i S_i(t)dt + \sigma_{i1} S_i(t)dB_t^{(1)} + \sigma_{i2} S_i(t)dB_t^{(2)}, i = 1, 2,$$

der $B_t^{(1)}$, $B_t^{(2)}$ er uavhengige 1−dimensjonale Brownske bevegelser og $\alpha_i, \sigma_{ij}, i, j = 1, 2$ er koeffisienter slik at $\sigma_{11} = 0.30, \sigma_{12} = 0.20, \sigma_{21} = 0.375$ og $\sigma_{22} = 0.25$. La r være den konstante markedsrenten.

(Fortsettes på side 2.)

Finn ut om markedet har arbitasjemuligheter og om det er komplett eller ikke.

Oppgave 3. (10 poeng)

(i) Gi definisjonen av en martingal (Du trenger ikke å gi definisjonen av en filtrasjon $\mathcal{F}_t$).

Fra nå av skal vi anta at $\mathcal{F}_t$ er den naturlige filtrasjonen til en Brownsk bevegelse.

(ii) Bruk definisjonen av en martingal til å sjekke om prosessene

$$X_t := B_t \text{ og } X_t := (B_t)^2$$

er martingaler eller ikke (B_t 1−dimensjonal Brownsk bevegelse).

(iii) Bruk definisjonen av et Itô-integral (ikke Itô-Lemma) til å beregne $\int_0^t B_s^2 dB_s$.

Oppgave 4. (10 poeng)

Betrakt den 1−dimensjonale Black-Scholes-modellen for aksjepriser $S(t)$ gitt ved

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t, S(0) = x,$$

der B_t er en Brownsk bevegelse og $\sigma > 0$, μ er konstanter. Videre, la r være markedsrenten som vi antar konstant. Betrakt en opsjon (claim) som betaler 1 krone på tid T, hvis $20 \leq S(T) \leq 30$. Ellers betaler opsjonen 0 kroner.

(i) Finn den arbitasjefrie prisen til opsjonen på tid t, der $0 \leq t \leq T$.

(ii) Beregn antallet aksjer $a^H(t)$ (dvs. delta $\frac{\partial}{\partial x}C(t, S(t))$) du må holde på tid t for å replikere opsjonen.

Oppgave 5. (6 poeng)

Betrakt et (1-dimensjonalt) Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r og en aksje med en aksjeprisdynamikk $S_t^{(1)}$ som er beskrevet av

$$dS_t^{(1)} = \mu S_t^{(1)}dt + \sigma_1 S_t^{(1)}dB_t, S_0^{(1)} = x,$$

hvor $B_t, 0 \leq t \leq T$ er en Brownsk bevegelse og $\mu \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0$ er konstanter. Videre, la oss se på en aksjeprisprosess $S_t^{(2)}$ som er gitt ved

$$dS_t^{(2)} = \mu S_t^{(2)}dt + \sigma_2 S_t^{(2)}dB_t, S_0^{(2)} = x$$

m.h.p. et annet Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r, hvor $\sigma_2 > \sigma_1$ er en konstant. La p_i være den arbitrasjefrie prisen av en europeisk kjøpsopsjon på tidspunkt $t = 0$ med forfallsdato T (maturity) og strike-pris K på en enhet av $S_T^{(i)}$ for $i = 1, 2$.
La oss nå anta at aksjeprisprosessen S_t på et Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r tilfredsstiller

$$dS_t = \mu S_t dt + \widetilde{\sigma}(t)S_t dB_t, S_0 = x,$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor volatiliteten er *stokastisk* og modellert ved hjelp av en adaptert stokastisk prosess $\widetilde{\sigma}(t), 0 \leq t \leq T$ slik at $\sigma_1 \leq \widetilde{\sigma}(t) \leq \sigma_2$ for alle t.
Prisen p på tidspunkt $t = 0$ av en europeisk kjøpsopsjon med forfallsdato T og strike-pris K av S_T kan defineres som

$$p = E_{P^*}[e^{-rT} \max(0, S_T - K)],$$

hvor P^* er det sannsynlighetsmålet slik at den diskonterte aksjeprosessen blir en martingal.
Vis at

$$p \in [p_1, p_2].$$

Hint: Black-Scholes partiell differensiallikning:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) - rC(t,x) &= 0, t \in [0,T), x > 0 \\
C(T,x) &= f(x).
\end{aligned}$$

Slutt