Økonomisk Institutt, november 2005
Robert G. Hansen, rom 1208

ECON 1210: Løsning til oppgaven gitt på forelesningen 18.11.05

Tema: Spillteori

Oppgave 1 (denne oppgaven ble til eksamen 02.12.03)

(a)

Land B

	W_A / W_B	Liberal (L)	Proteksjonisme (P)
Land A	Liberal (L)	$25/25$	$10/30$
	Proteksjonisme (P)	$30/10$	$15/15$

Med Nash-likevekt mener vi en situasjon der ingen aktør har ønske om å endre sin egen tilpasning, gitt den andre aktørens tilpasning (dvs. ”ingen angrer”).

Hvis land B velger L, vil land A komme best ut ved å velge P (30 > 25). Hvis land B velger P, vil land A fortsatt komme best ut ved å velge P (15 > 10). Land A har dermed P som sin dominante strategi. Nøyaktig det samme gjelder for land B. Dermed er Nash-likevekten gitt ved utfallet $W_A / W_B = (15/15)$, der begge landene altså velger P. Spill av denne typen refereres ofte til som ”fangens dilemma” .

Med en Pareto-optimal allokering menes en situasjon der ingen kan få det bedre, uten at minst en annen får det verre. Vi ser dermed at Nash-likevekten i spillet over ikke er Pareto-optimal, ettersom utfallet for begge landene blir bedre dersom begge velger strategien L. Problemet er at en slik løsning vanskelig kan realiseres hvis partene ikke kan inngå troverdige og forpliktende avtaler, eller hvis spillet bare skal gjennomføres en gang (en-periode spill). Løsner vi på disse forutsetningene kan vi tenke oss flere mulige veier ut av Nash-likevekten, slik at en Pareto-forbedring realiseres, jfr. oppgave (b).

(b) Partene inngår en forpliktende og troverdig avtale om å velge L. Eksempelvis kan dette gjennomføres ved å avtale en straffemekanisme (bot) som ikke gjør det lønnsomt å bryte avtalen. Ettersom begge landene i spillet over kan tjene 5 på ensidig å bryte en avtale om å velge L, må straffen være større enn dette for å realisere Pareto-optimum, som i tabellen er gitt ved $W_A / W_B = (25/25)$.

En bot av størrelse $b > 5$ vil dermed sørge for at begge landene velger L, siden dette da blir den dominante strategien for begge landene. En slik løsning forutsetter selvfølgelig at det eksisterer instrumenter (uavhengig domstol, pistol etc.) som partene respekterer, og som sikrer at en eventuell bot faktisk må betales.

To andre forslag som kan realisere Pareto-forbedringer i forhold til Nash-likevekten: (Dette er det ikke spurt etter i oppgaven, men om noen studenter på eget initiativ har med noe i denne retning, bør de likevel belønnes for det.)

(1) ”Tit-for-tat” ved fler-periode spill: Det ene landet annonserer på en troverdig måte at det vil velge L i første periode, og at det i neste periode vil velge det som det *andre* landet valgte i første periode. Dermed kan det andre landet tjene 5 i første periode på å velge P, men samtidig vil tapet i neste periode bli på 10. Dersom gevinsten i første periode ikke betyr mer enn det dobbelte av tapet i neste periode for det andre landet, vil dermed begge landene velge L. (Dette vil være et rimelig utfall så lenge det totale antall perioder ikke er gitt på forhånd, og så lenge ikke lengden mellom periodene er for lang, eller neddiskonteringsrenta er for høy.)

(2) Altruisme: Hvis begge landene i tilstrekkelig grad tar hensyn til det andre landets velferdsnivå ved valg av eget lands strategi, kan dette gi en Pareto-optimal løsning. I spillet over kan hvert av landene isolert sett tjene 5 på å velge P hvis det andre landet velger L. Landet som velger L vil da tape 15 sammenliknet med utfallet der begge velger L. Dersom hvert av landene lar et slikt tap (for motspilleren) veie tyngre enn egen gevinst, vil den Pareto-optimale løsningen der begge velger L bli realisert.

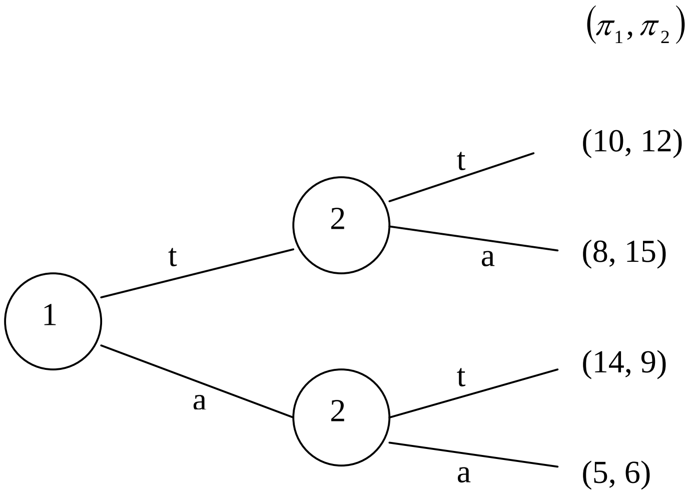
Oppgave 2 (denne oppgaven ble til eksamen 24.11.04)

(a) Spill 1: Begge aktørene har ”aggressiv” som dominant strategi. Entydig Nash-likevekt: $\left(\pi_1(a), \pi_2(a)\right) = (5, 5)$.

Spill 2: Aktør 1 har ingen dominant strategi. Aktør 2 har ” aggressiv” som dominant strategi, og dette vet aktør 1. Følgelig blir entydig Nash-likevekt: $\left(\pi_1(a), \pi_2(a)\right) = (8, 9)$.

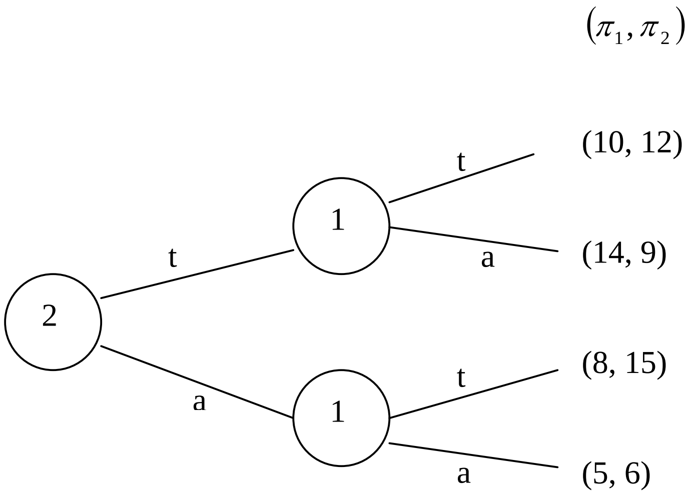
Spill 3: Ingen av aktørene har dominante strategier. Strategikombinasjonene $\left(\pi_1(t), \pi_2(a)\right) = (8, 15)$ og $\left(\pi_1(a), \pi_2(t)\right) = (14, 9)$ er begge Nash-likevekter, ettersom ingen av aktørene har ønske om å endre sin egen tilpasning gitt den aktørenes strategivalg, hvis et av disse utfallene realiseres.

(b) Aktør 1 trekker først:



Aktør 1 innser at dersom han velger ”tilbakeholden” vil aktør 2 velge ”aggressiv” (fordi $\pi_2(a) > \pi_2(t)$), og dersom han velger ” aggressiv” vil aktør 2 velge ”tilbakeholden” (fordi $\pi_2(t) > \pi_2(a)$). Ettersom $(\pi_1(a), \pi_2(t)) = (14, 9)$ er å foretrekke fremfor $(\pi_1(t), \pi_2(a)) = (8, 15)$ for aktør 1, vil dermed aktør 1 velge ” aggressiv”. Altså er delspillperfekt likevekt gitt ved $(\pi_1(a), \pi_2(t)) = (14, 9)$.

Aktør 2 trekker først:



Aktør 2 innser at dersom han velger ”tilbakeholden” vil aktør 1 velge ”aggressiv” (fordi $\pi_1(a) > \pi_1(t)$), og dersom han velger ”aggressiv” vil aktør 1 velge ”tilbakeholden” (fordi $\pi_1(t) > \pi_1(a)$). Ettersom $(\pi_1(t), \pi_2(a)) = (8, 15)$ er å foretrekke fremfor $(\pi_1(a), \pi_2(t)) = (14, 9)$ for aktør 2, vil dermed aktør 2 velge ”aggressiv”. Altså er delspillperfekt likevekt gitt ved $(\pi_1(t), \pi_2(a)) = (8, 15)$.

I dette spillet er det altså en fordel å trekke først for begge aktørene.

Eksempler på situasjoner der det kan være en fordel å trekke først:
(i) Lansering av nye produkter
(ii) Annonsering av prisreduksjoner (hvis det skaper flere lojale kunder)

Eksempler på situasjoner der det kan være en fordel å trekke sist:
(i) Lansere forbedringer av konkurrentenes produkter
(ii) Åpen budgivning med endelige tidsfrister
(iii) Russisk rulett

Oppgave 3 (denne oppgaven ble til eksamen 14.01.05)

(a) På normalform kan formuleres spillet settes opp slik:

		Aktør B	
	π_A / π_B	p^H	p^L
Aktør A	p^H	$20/20$	$5/25$
	p^L	$25/5$	$10/10$

(b) Med *Nash-likevekt* mener vi en situasjon der ingen aktør har ønske om å endre sin egen tilpasning, gitt den andre aktørens tilpasning (dvs. ”ingen angrer”). Med andre ord kjennetegnes en Nash-likevekt av at ingen av spillerne ville ha endret strategi selv om de fikk muligheten til det i ettertid.

En aktør sies å ha en *dominant strategi* dersom aktøren kommer best ut ved å velge denne strategien *uavhengig* av hva den andre aktøren gjør. En tilstrekkelig betingelse for at en Nash-likevekt skal eksistere, er at *minst en* av aktørene har en dominant strategi.

I spillet over har begge aktørene p^L som dominant strategi, som kan begrunnes slik:

For A: (i) Hvis B velger $p^H \Rightarrow$ velg p^L (25 er bedre enn 20)

(ii) Hvis B velger $p^L \Rightarrow$ velg p^L (15 er bedre enn 10)

For B: (i) Hvis A velger $p^H \Rightarrow$ velg p^L (25 er bedre enn 20)

(ii) Hvis A velger $p^L \Rightarrow$ velg p^L (15 er bedre enn 10)

Vi ser at den eneste Nash-likevekten er nederste høyre hjørne i tabellen, det vil si begge aktørene velger lav pris (p^L). Dette til tross for at begge ville kommet bedre ut dersom de valgte høy pris (p^H), og kunne stole på at motparten valgte det samme. Situasjonen over refereres ofte til som *fangens dilemma* (”prisoner’s dilemma”).

(c) Noen mulige mekanismer og tiltak som kan lede til at likevekten i spillet over blir at begge tilbyderne velger å ta en høy pris, slik at Nash-likevekten ikke etableres:

(i) *Straffemekanismer*: Tilbyderne inngår en forpliktende og troverdig avtale om å velge høy pris. Eksempelvis kan dette gjennomføres ved å avtale en straffemekanisme (bot) som ikke gjør det lønnsomt å bryte avtalen. Ettersom begge tilbyderne i spillet over kan tjene 5 på ensidig å bryte en avtale om å velge p^H , må straffen være større enn dette for å realisere utfallet der begge velger høy pris.

En bot av størrelse $b > 5$ vil dermed sørge for at begge tilbyderne velger p^H , siden dette da blir den dominante strategien for begge tilbyderne. En slik løsning forutsetter selvfølgelig at det eksisterer instrumenter som partene respekterer, og som sikrer at en eventuell bot faktisk må betales.

(ii) ”*Tit-for-tat*” ved gjentatte spill: Den ene tilbyderen annonserer på en troverdig måte at han vil velge p^H i første spilleomgang, og at han neste gang spillet skal spilles vil velge den strategien den *andre* tilbyderen valgte i første spilleomgang. Dermed kan det andre tilbyderen tjene 5 i første spilleomgang på å velge p^L , men samtidig vil tapet i neste periode bli på 10 (sammenliknet med utfallet der p^H er felles strategivalg). Dersom gevinsten i første periode ikke betyr mer enn det dobbelte av tapet i neste periode for den andre tilbyderen, vil dermed begge tilbyderne velge p^H . (Dette vil være et rimelig utfall så lenge det totale antall perioder ikke er gitt på forhånd, og så lenge ikke lengden mellom periodene er for lang, eller neddiskonteringsrenta er for høy.)

(iii) *Altruisme*: Hvis begge tilbyderne i tilstrekkelig grad tar hensyn til den andre tilbyderens profitt ved valg av egen prisstrategi, kan dette føre til at begge velger høy pris. I spillet over kan hver av tilbyderne isolert sett tjene 5 på å velge p^L hvis den andre velger p^H. Tilbyderen som velger p^H vil da tape 15 sammenliknet med utfallet der begge velger p^H. Dersom hver av tilbyderne lar et slikt tap (for den andre) veie tyngre enn egen gevinst, vil løsningen der begge velger p^H bli realisert. Dette er kanskje rimelig i tilfeller der tilbyderne er gode venner, er i slekt eller er medlem av samme hemmelige broderskap (eksempelvis Tempelridderordenen eller Hakkespettklubben).