Økonomisk Institutt, oktober 2005
Robert G. Hansen, rom 1208

ECON 1210: Noen regneregler og løsningsprosedyrer som brukes i kurset

(A) Faktorisering og brøkregning

(1) Vi kan sette en felles faktor utenfor en parentes:

$$x + xy \Leftrightarrow x(1+y)$$

der det siste uttrykket betyr x multiplisert med parentesen $(1+y)$.

(2) Multiplikasjon av et tall med en parentes foregår ved å multiplisere tallet med alle leddene i parentesen:

$$5(x-y) = 5x - 5y\,.$$

(3) Tall i telleren i en brøk kan settes foran eller bak brøken:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}x = x\frac{1}{1-x}$$

(4) Minustegn kan flyttes fra telleren til foran brøken:

$$\frac{-x}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$$

Husk at minustegn foran et tall eller en variabel er å tenke på som tallet (-1) multiplisert med det som kommer etter:

$$\frac{-(1)x}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = -\frac{x}{1-x}\,.$$

(5) Dersom vi skal legge sammen en brøk og et helt tall, eller to brøker, må de settes på felles brøkstrek:

$$1+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}$$

Tilsvarende regneregler gjelder selvfølgelig med symboler:

$$c_0+\frac{1}{3}c_0=\frac{3}{3}c_0+\frac{1}{3}c_0=\frac{3+1}{3}c_0=\frac{4}{3}c_0$$

Av og til må vi utvide:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Tilsvarende med symboler

$$\frac{1}{a}c_0+\frac{1}{b}c_0=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)c_0=\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ba}\right)c_0=\frac{b+a}{ab}c_0$$

(6) Multiplikasjon av to brøker:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$, eksempelvis

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, her kunne vi for øvrig strøket felles faktor (tallet 2) i teller mot felles faktor i nevner, og med en gang fått svaret.

(B) Løsning av likninger og likningssystemer

(1) Hvis det er *en likning med en ukjent* så må man sørge for å få den ukjente på den ene siden av likhetstegnet, og få tall på den andre siden. I denne prosessen er det er tillatt å gjennomføre samme operasjoner på begge sider av likhetstegnet, eksempelvis legge til et tall eller multiplisere med tall forskjellig fra null (husk at det er ulovlig å dividere med null):

$x+3=2x-4 \Leftrightarrow x-2x=-4-3 \Leftrightarrow -x=-7$ som etter multiplikasjon med (-1) gir $-x\cdot(-1)=-7\cdot(-1) \Leftrightarrow x=7$.

(2) Hvis det er *to likninger med to ukjente*, og begge likningene er *lineære*: Start med å løse en av likningene med hensyn på en av variablene, og sett resultatet inn i den andre likningen. Dermed får man et svar for den ene ukjente, som man deretter kan sette inn i den første likningen for å finne den andre ukjente.

(1) $p = 100 - x$

(2) $p = \frac{1}{2}x + 10$

Her er vi "heldige" siden begge likningene er løst med hensyn på *p*, slik at vi kan sette høyresiden i likning (1) lik høyresiden i likning (2):

$100 - x = \frac{1}{2}x + 10 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -90$ som etter multiplikasjon med $-\frac{2}{3}$ gir $-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{3}{2}x) = -\frac{2}{3}\cdot(-90) \Leftrightarrow x = 60$.

Ved innsetting i likning (1) eller (2) gir dette $p = 40$.

(C) Elastisiteter

Definisjon $\text{Pr}\,iselastisitet = \dfrac{\%-vis\ endring\ i\ kvantum}{\%-vis\ endring\ i\ pris}$

Lar vi Δx være endring i kvantum x og Δp være endring i pris p, kan vi skrive definisjonen over slik:

$$priselastisitet = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Denne definisjonen sikrer oss at etterspørselens prisfølsomhet måles ved prosentvise endringer i kvantum ved prosentvise endringer i pris, slik at den opprinnelige nominelle verdien på størrelsene er uten betydning for resultatet.

Eksempel

For en tid tilbake satte NSB Gardermobanen opp prisen for en enkeltreise fra Oslo til Gardermoen fra 90 kroner til 120 kroner. Som en følge av dette sank markedsandelen fra 40% til 38%. Ta nødvendige forutsetninger og

(a) Beregn priselastisiteten for denne prisendringen.

(b) Avgjør om bedriftsøkonomisk overskudd øker eller synker.

Løsning

(a) Forutsetter vi at totalt antall reisende til Gardermoen ikke ble endret som følge av denne prisøkningen, vil endringen i antall reisende være lik endringen i markedsandel, og vi får ved å benytte definisjonen over at

$$\text{Priselastisiteten} = \frac{-\frac{2}{40}}{\frac{30}{90}} = \frac{-\frac{1}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{-3}{20} = \underline{\underline{-0{,}15}}$$

Dette betyr at etterspørselen sank med 15% i forhold til prisøkningen.

(b) For å kunne regne ut endringen i bedriftsøkonomisk overskudd, må vi vite hvordan kostnadene endres, i tillegg til endringen i salgsinntekter. I dette tilfellet vil salgsinntektene øke kraftig, ettersom prisøkningen er langt større enn kvantumsreduksjonen. Når det gjelder kostnadene, er det rimelig å anta at disse er så godt som uavhengig av antall reisende, iallefall så lenge antall avganger er bestemt på forhånd. På denne måten kan vi argumentere for at endringen i bedriftsøkonomisk overskudd svarer til endringen i salgsinntekter, ettersom kostnadene kan oppfattes som mer eller mindre faste. Dermed vil altså det bedriftsøkonomiske overskuddet øke med økningen i salgsinntekter som følge prisøkningen.

Forutsatt at målet til NSB Gardemobanen (#sjekk navnet#) er å maksimere bedriftsøkonomisk overskudd, var dette altså var en fornuftig bedriftsøkonomisk beslutning. Imidlertid er det grunn til å stille spørsmål ved om dette også var en god beslutning målt etter samfunnsøkonomiske kriterier. Rimeligvis vil de passasjerene som sluttet å ta toget etter prisøkningen, benytte et annet transportmiddel til flypassen. Hvis et slikt alternativt transportmiddel gir økte samfunnsøkonomiske kostnader, dvs. hvis de aktuelle passasjerene ikke bare utnytter ledig kapasitet et annet sted, betyr dette at vi påfører oss kostnader vi kunne vært spart for (samfunnsøkonomisk). Dermed var prisøkningen en dårlig ide etter samfunnsøkonomisk målestokk, til tross for at det altså var en god ide rent privatøkonomisk.

Merknad

Vanligvis vil etterspørselen etter varer og tjenester være en fallende funksjon av prisen. Dermed vil priselastisiteten være et negativt tall. Økonomer dropper derfor ofte det negative fortegnet i definisjonen av priselastisiteten, og bruker istedet absoluttverdien (tallverdien) til denne størrelsen.

Dersom kvantumsendringen er større enn prisendringen målt i prosent, sier vi at etterspørselen er *priselastisk*, eller prisfølsom. Tilsvarende sier vi at etterspørselen er *prisuelastisk*, eller prisufølsom, dersom kvantumsendringen er mindre enn prisendringen målt i prosent. I spesialtilfellet der prisendringen nøyaktig svarer til kvantumsendringen, sier vi at etterspørselen er *nøytralelastisk*. For å få enkel notasjon, kaller vi nå priselastisiteten for E . Altså:

(i) $|E| > 1$: Priselastisk

(ii) $|E| < 1$: Prisuelastisk

(iii) $|E| = 1$: Prisnøytralelastisk

(D) Telleregelen[1] (mest nyttig i makro – likevel tatt med her som litt bakgrunn for ekstra nysgjerrige studenter)

En økonomisk modell består gjerne av flere ligninger og flere variable. Variablene i modellen deler vi inn i endogene og eksogene variable. De endogene variable er de variable som vi bruker modellen til å regne ut verdien på. De eksogene variable er de variable som får sin verdi gitt utenfor modellen. Det betyr at dersom vi skal regne ut hva de endogene variablene blir, med tall, så må vi vite på forhånd hvilke verdier de eksogene variablene har.

Telleregelen sier at en modell kan bestemme verdien på like mange variable som det er uavhengige ligninger, slik at vi kan ha like mange endogene variable som det er uavhengige ligninger. Merk at telleregelen er en ”røff” regel der det kan konstrueres eksempler hvor den ikke gjelder.

Eks 1. Like mange variable som ligninger gir determinert modell:

Modellen

$y = 2$

$x + y = 4$

[1] Dette avsnittet er hentet fra forelesningsnotater i ECON 1310 av Steinar Holden, se http://folk.uio.no/sholden/ECON1310-regneregler-jan04.doc

har to ligninger, og vi kan finne verdien til de to variablene x og y: $x = 2$ og $y = 2$.

Eks 2 Flere variable enn ligninger gir ikke determinert modell:

Modellen

$y + z = 2$

$x + y + z = 4$

har to ligninger og tre variable, og dersom vi ikke har mer informasjon, kan vi ikke finne verdien på noen av variablene. Men dersom vi i tillegg får vite verdien på en av variablene, f.eks. $z = 0$, slik at z blir eksogen, da kan vi regne ut x og y (og får $x = y = 2$).

Eks 3 Flere ligninger enn variable gir inkonsistent modell

Modellen

$x + y = 2$

$x + 2y = 4$

$2x – 2y = 0$

er inkonsistent – det finnes ikke verdier for x og y som gjør at alle ligningene er oppfylt.

Eks 4 Telleregelen gjelder ikke ved lineært avhengige ligninger

I telleregelen over har vi oppgitt at ligningene må være uavhengige, noe som litt løst innebærer at de må gi informasjon som ikke allerede er innebygget i de andre ligningene

I modellen

$y + x = 2$

$2y + 2x = 4$

er det ikke mulig å finne verdiene for x og y, til tross for at det er to ligninger og to variable (f.eks. er $y = 2$ og $x = 0$ en mulig løsning, mens $y = -2$ og $x = 4$ er en annen mulig løsning). De to ligningene er lineært avhengige, og inneholder den samme informasjon.