Steinar Holden, februar 2015

Løsningsforslag til oppgave-sett Keynes-modeller

Oppgave 1
Betrakt modellen:

(1) $Y = C + I$
(2) $C = z^C + c_1 Y - c_2 r$ $\qquad 0 < c_1 < 1,\ c_{2\ >\ 0}$

der Y er BNP, C er konsum, I er realinvesteringer og r er realrente. Y og C er de endogene variable, og I og r er eksogene.

a) La $z^C = 160$, $c_1 = 0{,}8$, $c_2 = 30$, $I = 100$, $r = 2$. Finn likevektløsningene for Y og C.
b) Anta at investeringene øker til $I_1 = 120$. Finn likevektsløsningene for Y og C.

Løsningsforslag oppgave 1:
En måte å løse oppgave på, er å først sette inn tall for de eksogene variable og parametre, slik at vi får

(1') $Y = C + 100$

(2') $C = 160 + 0{,}8\ Y – 30 \cdot 2$

og deretter løse modellen for Y og C. Vi finner først løsningen for Y. Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor ”bli kvitt” den andre endogene variabelen C. Vi ”blir kvitt” C i (1') ved å erstatte den med uttrykket for C fra (2'). Med andre ord, vi setter (2') inn i (1'), bruker at I = 100, og får

$$Y = 160 + 0{,}8\ Y – 30 \cdot 2 + 100$$

Trekker fra 0,8 Y på begge sider, slik at vi får

$$Y – 0{,}8\ Y = 160 – 60 + 100$$

Regner ut uttrykkene på begge sider

$$0{,}2\ Y = 200$$

Deler på 0,2 på begge sider

$$\frac{0{,}2Y}{0{,}2} = \frac{200}{0{,}2} = 1000$$

Kan forkorte 0,2 mot 0,2 på venstresiden, slik at løsningen for Y blir

$Y = 1000.$

Løsningen for C finnes ved å sette løsningen for Y inn i (2')

$C = 160 + 0,8*1000 – 30\cdot 2 = 900$

Alternativt kunne vi løst oppgaven ved å først finne løsningene for Y og C analytisk, og deretter sette inn tall for parametere og eksogene variable.
Ved å sette inn for C i (1) ved å bruke (2), får vi

$Y = z^C + c_1Y – c_2r + I$

Her kan vi trekke fra Y på begge sider, slik at vi får

$Y – c_1Y = z^C – c_2r + I$

Vi kan sette Y utenfor en parentes på venstresiden

$Y(1-c_1) = z^C – c_2r + I$

og dele på uttrykket i parentesen på begge sider av likhetstegnet

(3) $$Y = \frac{1}{1-c_1}\left(z^C - c_2 r + I\right)$$

som er løsningen for Y. Løsningen for Y, (3), kan settes inn i konsumfunksjonen (2), slik at vi får

$$C = z^C + c_1 Y - c_2 r = z^C + \frac{c_1}{1-c_1}\left(z^C - c_2 r + I\right) - c_2 r$$

$$= z^C + \frac{c_1}{1-c_1} z^C + \frac{c_1}{1-c_1}\left(-c_2 r\right) + \frac{c_1}{1-c_1} I - c_2 r$$

$$= \left(1 + \frac{c_1}{1-c_1}\right) z^C + \left(\frac{c_1}{1-c_1} + 1\right)\left(-c_2 r\right) + \frac{c_1}{1-c_1} I$$

(4) $$= \left(\frac{1-c_1}{1-c_1} + \frac{c_1}{1-c_1}\right) z^C + \left(\frac{c_1}{1-c_1} + \frac{1-c_1}{1-c_1}\right)\left(-c_2 r\right) + \frac{c_1}{1-c_1} I$$

$$= \left(\frac{1-c_1+c_1}{1-c_1}\right) z^C + \left(\frac{c_1+1-c_1}{1-c_1}\right)\left(-c_2 r\right) + \frac{c_1}{1-c_1} I$$

$$= \frac{1}{1-c_1} z^C + \frac{1}{1-c_1}\left(-c_2 r\right) + \frac{c_1}{1-c_1} I$$

$$= \frac{1}{1-c_1}(z^C - c_2 r) + \frac{c_1}{1-c_1} I$$

som er løsningen for C. Nå kan vi sette inn tall for I, z^C, r, c_1 og c_2 i (3) og (4), og vi får de samme løsninger som vi har fått over. (3) og (4) kaller vi modellen på redusert form.

b) Løsningene for Y og C når I har økt til 120 kan vi finne på samme måte som under a). Når vi allerede har funnet løsningene for Y og C, er det enklest å sette inn tall direkte der. Da får vi

$$Y = \frac{1}{1-0{,}8}\left(160 - 30\cdot 2 + 120\right) = 5\cdot 220 = 1100$$

$$C = \frac{1}{1-0{,}8}(160 - 30\cdot 2) + \frac{0{,}8}{1-0{,}8}120 = 5\cdot 100 + 4\cdot 120 = 980$$

Oppgave 2

Betrakt modellen:

(3) Y = C + I

(4) C = 400 + 0,8 Y – 50·r

der Y er BNP, C er konsum, I er realinvesteringer og r er realrenten. Y og C er de endogene variable, mens investeringene I = 300 og realrenten r = 2.

a) Finn likevektsløsningene for Y, C og sparingen S = Y – C.
b) Anta at konstantleddet i konsumfunksjonen reduseres til 380, dvs. at konsumfunksjonen nå blir

(5) $C = 380 + 0{,}8\,Y - 50\cdot r$

Finn likevektsløsningene for Y, C og S. Sammenlign med svaret på a), og forklar de økonomiske mekanismene.

Løsningsforslag oppgave 2:
Vi finner først løsningen for Y.
Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor ”bli kvitt” den andre endogene variabelen C. Vi ”blir kvitt” C i (1) ved å erstatte den med uttrykket for C fra (2). Med andre ord, vi setter (2) inn i (1), bruker at $c_2 r = 100$ og $I = 100$, og får

$$Y = 400 + 0{,}8\,Y - 100 + 300.$$

Trekker fra 0,8 Y på begge sider, slik at vi får

$$Y - 0{,}8\,Y = 600$$

Regner ut uttrykkene på begge sider

$$0{,}2\,Y = 600$$

Deler på 0,2 på begge sider

$$\frac{0{,}2Y}{0{,}2} = \frac{600}{0{,}2}$$

Kan forkorte 0,2 mot 0,2 på venstresiden, og regne ut høyresiden, der å dele på 0,2 er det samme som å multiplisere med 5, slik at løsningen for Y blir

$$Y = 600\cdot 5 = 3000.$$

Løsningen for C finnes ved å sette løsningen for Y inn i (2)

$$C = 400 + 0{,}8*3000 - 50\cdot 2 = 2700$$

Løsningen for sparingen S finnes ved å sette inn løsningene for Y og C i uttrykket for S:

$$S = Y - C = 3000 - 2700 = 300.$$

b) gjøres på tilsvarende måte. Vi får
$Y = (380-100+300)/0{,}2 = 580*5 = 2900$
$C = 380 + 0{,}8*2900 - 100 = 2600$
$S = 2900 - 2600 = 300$

Endringen i Y blir $\Delta Y = 2900 - 3000 = -100$. BNP reduseres. Reduksjonen i BNP er mye større enn den initiale reduksjonen i konsumet, $\Delta z^C = 380 - 400 = -20$. Årsaken til at BNP reduseres mer enn den initiale reduksjonen i konsumet, er multiplikator-virkninger via konsumet. Den initiale reduksjonen i konsumet gir redusert BNP, som igjen fører til redusert inntekt og dermed redusert konsum. Reduksjonen i konsumet gir ytterligere reduksjon i BNP og inntekt, som igjen fører til redusert konsum. Osv.

På oppgave 3 gis bare skisse med riktige formler

Oppgave 3

a) Likevektsløsninger for Y og C

$$Y = \frac{1}{1-c_1}\left(z^C - c_1 T - c_2 r + I + G\right)$$

$$C = \frac{1}{1-c_1} z^C + \frac{c_1}{1-c_1}\left(-T - c_2 r + I + G\right) - c_2 r$$

(uttrykket for C kan forenkles ytterligere, ved å samle delene med $c_2 r$)

b - e)

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c_1}\Delta I > 0$$

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c_1}\Delta G > 0$$

$$\Delta Y = \frac{-c_1}{1-c_1}\Delta T > 0$$

$$\Delta Y = \frac{-c_1}{1-c_1}\Delta T + \frac{1}{1-c_1}\Delta G = \Delta G < 0$$

$$\Delta B = \Delta T - \Delta G = 0$$

(på d) er multiplikatoren mindre ved skattelette enn ved økt offentlig bruk av varer og tjenester, fordi noe av skatteletten blir spart)

Oppgave 4

Betrakt modellen

(1)	$Y = C + I + G$	
(2)	$C = z^C + c_1(Y - T) - c_2 r$	$0 < c_1 < 1,\ c_2 > 0$
(3)	$T = z^T + tY$	

der Y er BNP, C er privat konsum, I er private realinvesteringer, G er offentlig bruk av varer og tjenester, og T er skatter minus overføringer, og r er realrenten. Y, C og T er de endogene variable. Investeringene er eksogene I = 400, og realrenten r = 4. Offentlige virkemidler er G = 400 og z^T = 20 og t = 0,5. Parameterverdiene er z^C = 300, c_1 = 0,8 og c_2 = 25.

a) Finn likevektsløsningene for Y, C og T. Hva blir den offentlige budsjettbalansen B = T – G?
b) Anta at G øker til 420. Finn likevektsløsningene for Y, C, T og B.
c) Anta at G = 400, men at z^T reduseres til 0. Finn likevektsløsningene for Y, C, T og B. Sammenlign med svaret under b)

Løsningsforslag oppgave 4
Vi finner først løsningen for Y.
Da må vi få et uttrykk for Y alene, og må derfor "bli kvitt" de andre endogene variable, C og T. Vi "blir kvitt" C og T i (1) ved å erstatte dem med uttrykket for C fra (2) og T fra (3). Med andre ord, vi setter (2) og (3) inn i (1), og får

$Y = z^C + c_1(Y-(z^T + tY)) – c_2r + I + G.$
Vi løser ut parentesen på høyre-siden

$Y = z^C + c_1Y – c_1 z^T – c_1tY – c_22 + I + G.$

Vi trekker fra c_1Y og legger til c_1tY på begge sider av likhetstegnet

$Y - c_1Y + c_1tY = z^C + c_1Y – c_1 z^T – c_1tY – c_22 + I + G - c_1Y + c_1tY$

På høyresiden kan vi forkorte bort leddene med c_1Y og c_1tY, og på venstresiden settes Y utenfor en parentes

$Y(1 - c_1 + c_1t) = z^C – c_1 z^T – c_22 + I + G$

som kan omskrives til

$Y(1 - c_1(1-t)) = z^C – c_1 z^T – c_22 + I + G$

Vi deler på uttrykket i parentesen på begge sider av likhetstegnet, slik at Y står alene på venstresiden

$$(4)\quad Y = \frac{1}{1-c_1(1-t)}(z^C - c_1 z^T - c_2 r + I + G)$$

(4) er løsningen for Y. Vi setter inn de oppgitte verdier for parametre og eksogene variable, og får

$$Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(300-0,8\cdot 20-25\cdot 4+400+400) = \frac{1}{1-0,4}984 = \frac{1}{0,6}984 = 1640$$

Vi setter inn løsningen for Y i (2) og (3), sammen med de oppgitte parameterverdier

T = 20 + 0,5·1640 = 840
C = 300 + 0,8*(1640-840) – 25·4 = 840

Kontroll: Vi kan sette inn verdier for Y, C, I og G, og sjekke at generaløkosirken Y = C + I + G stemmer: 1640 = 840 + 400 + 400, og det stemmer.

Den offentlige budsjettbalansen blir

B = T – G = 844 - 400 = 440

b) G øker til 420
Vi gjør på samme måte som under a), og får
(5)

$$Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(300-0,8\cdot 20-25\cdot 4+400+420) = \frac{1}{1-0,4}1004 = \frac{1}{0,6}1004 \approx 1673,33$$

BNP øker dermed med ΔY = 1673 – 1640 = 33,33.

Vi setter inn løsningen for Y i (2), (3) og uttrykket for B, sammen med de oppgitte parameterverdier, og får

T = 20 + 0,5·1673 ≈ 857
C = 300 + 0,8*(1673-857) – 25·4 ≈ 853
B = T – G = 857 – 420 = 437

Kontroll: Y = C + I + G => 1673 = 853 + 400 + 420, som stemmer.

Merk at den offentlige budsjettbalansen svekkes, men mindre enn den initiale økningen i offentlig kjøp av varer og tjenester ΔG = 120 – 100 = 20. Vi får

ΔB = 437 – 440 = - 3

Årsaken til at B bare svekkes med 3 selv om G øker med 20, er at BNP øker, slik skatteinntektene T også øker.

c) G = 400, men z^T reduseres til 0.
Vi gjør på samme måte som under b), og får

(6)

$$Y = \frac{1}{1-0,8(1-0,5)}(300-25\cdot 4+400+400) = \frac{1}{1-0,4}1000 = \frac{1}{0,6}1000 \approx 1667$$

Vi setter inn løsningen for Y i (2), (3) og uttrykket for B, sammen med de oppgitte parameterverdier, og får

T = 0,5*1667 ≈ 833
C = 300 + 0,8*(1667-833)-25·4 ≈ 867
Kontroll: Y = C + I + G => 1667 = 867 + 400 + 400, som stemmer
B = T – G = 833-400 = 433

Sammenligningen av b) og c).
Begge punkter innebærer at den offentlige budsjettbalansen initialt endres med 20 (ΔG = 420-400 = 20, og Δt_0 = 20 – 0 = 20. Likevel ser vi at økningen i offentlig kjøp av varer og tjenester G fører til større økning i BNP enn dersom skattene reduseres med det samme beløpet. ΔY = 1673-1640 = 33 i b), og ΔY = 1667 – 1640 = 27 i c).

Matematisk sett ser vi årsaken til denne forskjellen dersom vi sammenligner uttrykkene for løsning for Y, dvs (5) og (6). z^T multipliseres med den marginale konsumtilbøylighet, parameteren c_1, som er mindre enn en (i vårt tilfelle lik 0,8). Dermed har en endring i t_0 mindre betydning for BNP enn det en endring i G har.

Økonomisk sett er forskjellen mellom virkning av endret offentlig kjøp, G, og endrede skatter, z^T, at skattereduksjonen fører til mindre økning i etterspørselen, fordi noe av skatteletten slår ut i økt privat sparing, mens hele økningen i G innebærer økt etterspørsel.