Handout m/oppgaver til 7. forel. ECON 1500 Utgiftsminimering

Kjell Arne Brekke

February 27, 2012

1 Konsumentteori

1.1 Etterspørsel

En konsument har nyttefunksjon $U(x, y)$ og maksimerer nytten under budsjettbetingelsen

$$p_x x + p_y y = m$$

Det optimale valget av vare x avhenger av priser og inntekt, og kan skrives $x(p_x, p_y, m)$.

Oppgave 1 *Hva blir $x(2p_x, 2p_y, 2m)$? Altså hvordan endres etterspørselen når alle priser og inntekten dobles. (Hint: Denne oppgaven handeler om budsjettbetingelsen, blir konsumenten rikere eller fattigere?)*

1. Etterspørselen dobles $x(2p_x, 2p_y, 2m) = 2x(p_x, p_y, m)$
2. Etterspørselen blir uendret: $x(2p_x, 2p_y, 2m) = x(p_x, p_y, m)$
3. Etterspørselen halveres: $x(2p_x, 2p_y, 2m) = x(p_x, p_y, m)/2$

1.2 Utgiftsminimering

En konsument har nyttefunksjon

$$U(x, y)$$

og prisene er p_x og p_y. Hvor mye inntekt trenger denne konsumenten for å nå et nyttenivå $\bar{u}$. Dette er et minimeringsproblem

$$\min\,(p_x x + p_y y) \text{ under bibetingelsen } U(x, y) = \bar{u}$$

Lagrangefunksjonen blir

$$\mathcal{L}(x, y) = p_x x + p_y y - \lambda(U(x, y) - \bar{u})$$

Stasjonærpunktene blir bestemt av lingningene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x &= p_x - \lambda U_x'(x,y) = 0 \\ \mathcal{L}_y &= p_y - \lambda U_y'(x,y) = 0\end{aligned}$$

Oppgave 2 *Løs begge ligningene for λ og bruk dette til å ulede en ligning uten λ. Etter litt opprydding blir dette:*

1. Ligningen blir
$$\frac{p_x}{p_x} = \frac{U_x'}{U_y'}$$

2. Ligningen blir
$$\frac{p_x}{p_x} = \frac{U_y'}{U_x'}$$

Den minimale utgiften avhenger av prisene og av hvilken nyttenivå vi skal oppnå. Vi skriver dette som $E(p_x, p_y, \bar{u})$

Eksempel: Dersom
$$U(x,y) = \ln x + \ln y$$

Vil Lagranges metode gi
$$p_x x = p_y y$$

Altså
$$\ln x = \ln p_y - \ln p_x + \ln y$$

Så

$$\begin{aligned}\ln x + \ln y &= 2\ln y + \ln p_y - \ln p_x = \bar{u} \\ \ln y &= \frac{1}{2}\left(\bar{u} + \ln p_x - \ln p_y\right)\end{aligned}$$

Som gir

$$\begin{aligned}y^c(p_x, p_y, \bar{u}) &= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\bar{u} + \ln p_x - \ln p_y\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{p_x}{p_y} e^{\bar{u}}}\end{aligned}$$

og tilsvarende kan vi regne ut at

$$x^c(p_x, p_y, \bar{u}) = \sqrt{\frac{p_y}{p_x} e^{\bar{u}}}$$

Vi ser da at om vi setter $\bar{u} = 0$, og $p_x = p_y$ så vil

$$x = y = 1$$

Så den minimale utgiften $E(p_x, p_y, \bar{u})$ når $p_y = p_x$ og $\bar{u} = 0$ er

$$E(p_x, p_x, 0) = p_x 1 + p_y 1 = 2p_x$$

Om vi øker $\bar{u}$ til 1 ser vi at

$$\begin{aligned} \ln y &= 1/2 \\ y &= x = \sqrt{e} \end{aligned}$$

så

$$E(p_x, p_x, 1) = p_x\sqrt{e} + p_y\sqrt{e} = 2\sqrt{e}p_x$$

Tilsvarende kan vi regne ut at

$$E(p_x, 2p_x, 0) = p_x\sqrt{2} + 2p_x\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}p_x$$

Generelt

$$\begin{aligned} E(p_x, p_y, \bar{u}) &= \min\left(p_x x + p_y y\right) \\ \text{under bibetingelsern } U(x, y) &= \bar{u} \end{aligned}$$

gir

$$E(p_x, p_y, \bar{u}) = p_x\sqrt{\frac{p_y}{p_x}e^{\bar{u}}} + p_y\sqrt{\frac{p_x}{p_y}e^{\bar{u}}} = 2\sqrt{p_x p_y e^{\bar{u}}}$$

1.3 Shepards Lemma

Vi husker fra kryssrettingene at omhylningsteoremet sier at dersom

$$g(x) = \max_y f(x, y) = f(x, y^*(x))$$

så er

$$g'(x) = f'_x(x, y^*(x))$$

Når vi har et betinget optimaliseringsproblem finnes et tilsvarende resultat som vi ikke skal vise (ligning 2.75 i læreboka). Det sier at

$$\frac{\partial}{\partial p_x}E(p_x, p_y, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} \text{ der er lagrangefunksjonen}$$

I dette tilfellet er

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y y - \lambda(U(x, y) - \bar{u})$$

Så

$$\frac{\partial}{\partial p_x}E(p_x, p_y, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_x x + p_y y - \lambda(U(x, y) - \bar{u})\right) = x^c(p_x, p_y, \bar{u})$$

og på samme måte er

$$\frac{\partial}{\partial p_y}E(p_x, p_y, \bar{u}) = y^c(p_x, p_y, \bar{u})$$

Oppgave 3 *Læreboka finner at om*

$$U(x, y) = \sqrt{xy}$$

så blir utgiftsfunksjonen

$$E(p_x, p_y, \bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_x p_y}.$$

Hva blir $y^c(p_x, p_y, \bar{u})$*?*

1. Det blir $y^c(p_x, p_y, \bar{u}) = \bar{u}\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}$
2. Det blir $y^c(p_x, p_y, \bar{u}) = \bar{u}\sqrt{\frac{p_y}{p_x}}$
3. Det blir $y^c(p_x, p_y, \bar{u}) = 2\sqrt{p_x p_y}$