Handout 9. forelesning ECON 1500 - Produksjonsteori

Februar 2011

1 Teknologi

Teknologien kan representeres ved en produktfunksjon

$$q = f(k, l)$$

der q er produsert mengde og k og l er bruken av innsatsfaktorene kapital og arbeidskraft. De fleste typer produksjon vil selvsagt kreve flere innsatsfaktorer, men vi skal her gjøre det enkelt og begrense oss til to innsatsfaktorer.

1.1 Profittmaksimering

Den grunnleggende modellen for bedriftenes adferd er at de maksimerer profitt. Om p er prisen på produktet som produseres, w er prisen på arbeidskraft og v er prisen på kapital, så blir profitten

$$pf(k, l) - vk - wl$$

Som vi senere skal se har ikke dette problemet alltid en veldefinert løsning, og vi skal derfor vente litt med å analysere det grundig. I ett tilfelle har vi imidlertid en veldefinert løsning under rimelige forutsetninger, det er det vi kalle tilpassning på "kort sikt".

For å endre mengden kapital må bedriften først investere, investeringer i nye lokaler, utskifting av maskinpark osv tar gjerne tid å planlegge og gjennomføre. På kort sikt antar vi derfor at mengden kapital er gitt som k_0. Bedriften kan da bare velge l

$$\max_l pf(k_0, l) - vk_0 - wl$$

Det gir førsteordensbetingelse

$$pf'_l = w$$

som gir et maksimum om $f''_{ll} < 0$.

Oppgave 1 *Hva er tolkningen av betingelsen $pf'_l = w$?*

1. Bedriften setter lønna w lik verdien av den ekstra produksjonen ett timeverk ekstra gir.

2. Bedriften øker bruken av arbeidskraft inntil verdien av den ekstra produksjonen ett timeverk gir blir mindre enn kostnaden ved et timeverk mer.

1.2 Generelle egenskaper til produksjonsfunksjonen

Før vi analyserer bedriftens adferd nærmere skal vi se på hvilke egenskaper det er rimelig å kreve av produktfunksjonen. (Alle krav gjelder for $k, l \geq 0$.)

Marginalproduktivitet Det er naturlig å anta at en bedrift kan produsere minst like mye som før om mengden innsatsfaktorer øker: $f_l' \geq 0$, $f_k' \geq 0$. Untatt i noen spesialtilfeller vi vi anta at marginalproduktiviteten er strengt positiv.

Avtagende marginalproduktivitet Det er naturlig å tro at om bedriften velger en lav kapitalinnsats, vil den anskaffer det mest nødvendige produksjonsutstyret og anskaffe mindre essentielt utstyr når den utvider kapitalbeholdningen. Formelt betyr det $f_{ll}'' < 0$, $f_{kk}'' < 0$. (Merk at strenge ulikheter kan gjelde bare når marginalproduktiviteten er strengt positiv.)

Skalautbytte Om en bedrift har ett produskjonsanlegg med kapital k_0 og hvor en bruker l_0 timeverk, så kan de bygge en tro kopi et annet sted. Bedriften vil da ha to anlegg med total kapital $2k_0$ og hvor en totalt bruker $2l_0$ og de produserer $2f(k_0, l_0)$. Dette er tanken bak det vi kaller **konstant skalautbytte** som formelt betyr $f(tk, tl) = tf(k, l)$ for alle $t > 0$. Dersom det er spesielle forhold ved det første produksjonsanlegget som gjør at det er umulig å få like stor produksjons på det andre, vil vi ha avtagende skalautbytte som formelt betyr $f(tk, tl) < tf(k, l)$ for alle $t > 1$. Men det kan også tenkes at deler av produksjonen kan effektiviseres når bedriften har to anlegg så de to tilsammen produserer mer enn dobbelt så mye. Da har vi tiltagende skalautbytte, som formelt betyr $f(tk, tl) > tf(k, l)$ for alle $t > 1$

Oppgave 2 *Betrakt produktfunksjonen*

$$f(k, l) = \sqrt{kl}$$

Tilfredsstiller denne funksjonen betingelsen om positiv men avtagende marginalproduktivitet? Og hva slags skalautbytte har denne produktfunksjonen?

1. Den har positiv og avtagende marginalproduktivitet og avtagende skalautbytte.

2. Den har positiv og men ikke avtagende marginalproduktivitet. Den har konstant skalautbytte som er uforenelig med avtagende marginalproduktivitet.

3. Den har positiv og avtagende marginalproduktivitet og konstant skalautbytte.

4. Den har positiv men konstant marginalproduktivitet og konstant skalautbytte.

1.3 Isokvanten

Nivåkurvene til produktfunksjonen kaller vi isokvanter (iso for lik, kvant for kvantum)

$$q_0 = f(k, l)$$

Som for nyttefunksjonen definerer nivåkurven l som en funksjon av k. Og vi kan derivere implisitt:

$$\begin{aligned} 0 &= f'_k + f'_l l' \\ l' &= -\frac{f'_k}{f'_l} \end{aligned}$$

Denne brøken omtaler vi som

$$\text{Marginal Teknisk Substitusjonsbrøk} = \text{MTSB } = -\frac{f'_k}{f'_l} \text{ (I boka: TRS)}$$

Oppgave 3 *Hva er tolkningen av den marginale tekniske substitusjonsbrøken?*

1. Det er hvor mange enheter mer arbeidskraft bedriften trenger for å opprettholde kvantum når mengden kapitalinnsats faller med en enhet.

2. Det er hvor mange enheter mer kapital bedriften trenger for å opprettholde kvantum når mengden arbeidskraft faller med en enhet.

1.4 Kostnadsminimering

De lavest mulige kostnadene ved å produsere et gitt kvantum q finner vi ved å løse problemet

$$\min_{l,k} wl + vk \text{ under bibetingelsen } f(k, l) = q$$

Vi løser dette problemet med Lagranges metode

$$L = wl + vk - \lambda(f(k, l) - q)$$

Som gir førsteordenbetingelser

$$\begin{aligned} L'_k &= 0 \Rightarrow v = \lambda f'_k \\ L'_l &= 0 \Rightarrow w = \lambda f'_l \end{aligned}$$

Hver ligning kan løses for λ

$$\lambda = \frac{v}{f'_k} = \frac{w}{f'_l}$$

Som også betyr

$$\frac{f'_k}{v} = \frac{f'_l}{w}$$

Oppgave 4 *Hva er tolkningen av* $\frac{f'_k}{v}$*?*

1. Det er verdien av den ekstra produksjonen vi får ved å øke bruken av kapital med en enehet.
2. Det er det kvantum ekstra produksjonen vi får ved å øke bruken av kapital med en krone.

I tilfellet vi så på ovenfor

$$f(k,l) = \sqrt{kl}$$

så blir

$$\begin{aligned} f'_k &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{k}} = \frac{\sqrt{kl}}{2k} = \frac{q}{2k} \\ \text{tilsvarende } f'_l &= \frac{q}{2l} \end{aligned}$$

Betingelsen $\frac{f'_k}{v} = \frac{f'_l}{w}$ kan også skrives

$$\frac{v}{w} = \frac{f'_k}{f'_l} = \frac{l}{k}$$

Så

$$l = \frac{v}{w}k$$

Oppgave 5 *Sett inn for l i bibetingelsen*

$$\sqrt{kl} = q_0$$

og finn den optimale bruken av innsatsfaktorer som trengs for å produsere q_0. Regn deretter ut kostnadene.

1. Kostnadene C blir $C = 2q_0\sqrt{vw}$
2. Kostnadene C blir $C = q_0\left(w\sqrt{\frac{w}{v}} + v\sqrt{\frac{v}{w}}\right)$
3. Kostnadene C blir $C = q_0\sqrt{v+w}$
4. Kostnadene C blir $C = \sqrt{q_0 vw}$