UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Utsatt eksamen i: ECON2130 – Statistikk 1
Postponed exam: ECON2130 – Statistics 1

Eksamensdag: Torsdag 12. januar 2006
Date of exam: Thursday, January 12, 2006

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 12:00
Time for exam: 09:00 a.m. – 12:00 noon

Oppgavesettet er på 4 sider
The problem set covers 4 pages ***English version on page 3***

Tillatte hjelpemidler:
- Alle trykte og skrevne hjelpemidler, samt lommekalkulator

Resources allowed:
- *All written and printed resources, as well as calculator*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail

Oppgave 1

Vi har en hvit vase og en svart vase. I tillegg har vi seks baller, som er nummerert fra 1 til og med 6. Vi fordeler de seks ballene vilkårlig over de to vasene. Vi betrakter dette som et stokastisk forsøk, med et bestemt antall mulige utfall. For eksempel, ett mulig utfall er: ballene 1 og 3 i den hvite vasen, og ballene 2, 4, 5 og 6 i den svarte vasen. Ballene er ulike, men det er uvesentlig i hvilken rekkefølge de havner i den ene eller i den andre vasen.

1a. Hvor mange mulige utfall har dette forsøket - med andre ord, på hvor mange måter kan vi fordele de seks nummererte ballene over de to vasene?

1b. Den hvite vasen kan ha fått null, eller en, eller to, … eller seks baller. Anta at den hvite vasen fikk tre baller. På hvor mange måter kan vi fordele de seks ballene slik at den hvite vasen fikk tre baller?

1c. Anta nå at den hvite vasen fikk fire baller. På hvor mange måter kan vi fordele de seks ballene slik at den hvite vasen fikk fire baller?

1d. På hvor mange måter kan vi fordele de seks ballene slik at den hvite vasen fikk null, eller en, eller to, eller tre, eller fire, eller fem, eller seks baller?

1e. Gi et resonnement basert på kombinatorikk som viser at $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, med n et positivt heltall.

1f. Tenk deg nå at vi har *tre* vaser og *n* baller. Finnes det et tilsvarende enkelt uttrykk som i oppgave 1e, der svaret er 3^n ?

Oppgave 2

I en undersøkelse om utdanningsnivået blant ektepar har vi funnet følgende resultat, se tabellen.

		Hans utdanningsnivå (x)		
		Lav	Middels	Høy
Hennes utdanningsnivå (y)	Lav	0,15	0,07	0,03
	Middels	0,08	0,25	0,20
	Høy	0,02	0,10	0,10

For hvert ektepar representerer X mannens utdanningsnivå, og Y kvinnens utdanningsnivå. X og Y oppfattes som stokastiske variabler, med utfall x og y. Utdanningsnivå kan være lavt, middels eller høyt. Tabellen viser den empiriske simultane sannsynlighetsfordelingen for de to stokastiske variablene X og Y.

2a. Beregn den marginale sannsynlighetsfordelingen for kvinnenes utdanningsnivå.

2b. Beregn den betingede sannsynlighetsfordelingen for en kvinnes utdanningsnivå, når hennes mann har høy utdanning.

2c. Når du sammenligner svarene på oppgavene 2a og 2b, hva kan du konkludere angående avhengighet eller uavhengighet av mannens og kvinnens utdanningsnivå blant de parene som er med i undersøkelsen?

2d. Skriv P(Y=middels| X=høy) som et uttrykk med P(X=høy|Y=middels), P(Y=middels) og P(X=høy) og sjekk at Bayes' regel stemmer med tall fra tabellen.

Oppgave 3

På en trafikkert veistrekning ble det i 2005 registrert 8 ulykker. Vi antar at antall ulykker i 2005 er en Poissonfordelt stokastisk variabel, med t = 1 år og ukjent rate λ. Vi skriver denne stokastiske variabelen som X.

3a. Gi en estimator $\hat{\lambda}$ for λ. Er $\hat{\lambda}$ forventningsrett? Hvorfor?

3b. Estimer λ og variansen til $\hat{\lambda}$.

3c. Velg α lik 7,68%, og konstruer et tilnærmet 96,16% konfidensintervall for λ.

3d. Anta at ulykkesraten var 8 i 2005. Bruk Poissonfordelingen og beregn sannsynligheten $P[3 \leq X \leq 13]$. Sammenlign med svaret på oppgave 3c, og kommenter.

3e. Antall ulykker var 10 i 2004. Vi ønsker å teste hypotesen at Poissonraten har gått ned mellom 2004 og 2005. Vi setter opp hypoteseparet

H_0: $\lambda \geq 10$ og H_1: $\lambda < 10$.

Velg signifikansnivå lik 5 %, og gjennomfør testen.
Hva er den kritiske verdien til din testobservator? Hva er testens konklusjon?

ENGLISH VERSION

Problem 1

We have a white vase and a black vase. We have also six balls, which are numbered from 1 to 6. We distribute the six balls at random over the two vases. We consider this as a random experiment, with a certain number of possible outcomes. For example, one possible outcome is: balls with numbers 1 and 3 in the white vase, and balls with numbers 2, 4, 5, and 6 in the black vase. The balls are different, but the order in which they land in either of the two vases is irrelevant.

1a How many possible outcomes does this random experiment have - in other words, in how many ways can we distribute the six different balls over the two vases?

1b. The white vase may contain zero, or one, or two, …, or six balls. Imagine the white vase contains three balls. In how many ways can we distribute the six balls such that the white vase contains three balls?

1c. Assume now that the white vase contains four balls. In how many ways can we distribute the six balls such that the white vase contains four balls?

1d. In how many ways can we distribute the six balls such that the white vase contains zero, or one, or two, or three, or four, or five, or six balls?

1e. Use a combinatorial argument that proves that $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, where n is a positive integer.

1f. Assume now that we have *three* vases and *n* balls. Is it possible to find a similarly simple expression as the one in 1e, for which the answer is 3^n?

Problem 2

In a survey about the educational level among spouses, we found the following results; see the table.

		His educational level (x)		
		Low	Medium	High
Her educational level (y)	Low	0,15	0,07	0,03
	Medium	0,08	0,25	0,20
	High	0,02	0,10	0,10

For each couple, X represents the man's educational level, and Y is the woman's educational level. X and Y are considered as stochastic variables, with outcomes x and y. The educational level can be low, medium, or high. The table gives the empirical simultaneous probability distribution of the two stochastic variables X and Y.

2a. Find the marginal probability distribution of the educational level of women.

2b. Find the conditional probability distribution of the educational level of women who have a highly educated husband.

2c. When you compare your answers for 2a and 2b, what do you conclude regarding dependence or independence of spouses' educational levels among the couples in this survey?

2d. Write P(Y=medium| X=high) as an expression that contains P(X=high|Y=medium), P(Y=medium), and P(X=high), and verify that Bayes' rule holds in this case, by using the appropriate frequencies in the table.

Problem 3

Eight traffic accidents were registered at a certain road during the year 2005. We assume that the number of accidents in 2005 is a Poisson distributed stochastic variable, with t = 1 year and unknown rate λ. We write this stochastic variable as X.

3a. Find an estimator $\hat{\lambda}$ for λ. Is $\hat{\lambda}$ unbiased? Why?

3b. Estimate λ and the variance of $\hat{\lambda}$.

3c. Choose α equal to 7,68 per cent and construct an approximate 96,16 per cent confidence interval for λ.

3d. Assume now that the accident rate was equal to 8 during 2005. Use the Poisson distribution to find the probability $P[3 \leq X \leq 13]$. Compare your result with the result for 3c, and comment.

3e. During the year 2004, eight accidents were registered. We wish to test the hypothesis that the Poisson rate has diminished between 2004 and 2005. We formulate the following pair of hypotheses

H_0: $\lambda \geq 10$ and H_1: $\lambda < 10$.

Choose a significance level of 5 per cent, and carry out the test.
Find the critical value of the test statistic ("testobservator" in Norwegian.) What do you conclude?