ECON2130: EKSAMEN 2017 VÅR - UTSATT PRØVE

TALLSVAR.
Det anbefales at de 9 deloppgavene merket med A, B,… teller likt – uansett variasjon i vanskelighetsgrad. Svarene er gitt i <<< … >>>.

Oppgave 1

I tallspillet Lotto trekkes hver uke 7 såkalte *vinnertall* fra tallene 1,2,…,34 uten tilbakelegging. I tillegg, etter at de 7 vinneertallene er trukket, trekkes ett såkalt *tilleggstall* fra de gjenværende 27 tallene. Spillet går ut på å tippe så mange som mulig av disse. Man kan levere *enkeltrekker* og *systemrekker*. En enkeltrekke består av 7 forskjellige tall man selv velger ved å merke av på en trykt kupong. En kupong kan inneholde opptil 10 enkeltrekker som godt kan være like. Vi skal i denne oppgaven utelukkende se på enkeltrekker (ikke systemrekker).

Premiene er penger. Første-premien, som gir høyest utbetaling, får man hver gang en enkeltrekke treffer alle 7 vinnertallene. Lavest utbetaling, som vanligvis varierer blant de to beløpene 45 kr. og 50 kr., får man for en enkeltrekke som har akkurat 4 vinnertall (uansett om rekken også har tilleggstallet eller ikke).

1. premie: 7 vinnertall
2. premie: 6 vinnertall pluss tilleggstallet
3. premie: 6 vinnertall (uten tilleggstallet)
4. premie: 5 vinnertall (med eller uten tilleggstallet)
5. premie: 4 vinnertall (med eller uten tilleggstallet)

Sannsynlighetene for alle kombinasjoner av vinnertall og tilleggstall som en enkeltrekke kan få, er gitt i tabell 1. Hvert tall i tabellen må deles på $K = 5\,379\,616$ for å få fram sannsynligheten, der K er antall mulige ikke-ordnete utvalg på 7 objekter som kan trekkes fra 34 objekter. For eksempel er sannsynligheten for at en enkeltrekke skal ha 4 vinnertall og ingen tilleggstall gitt ved $91\,000/K = 0.0169...$.

Med andre ord, det kan vises (som du ikke trenger å gjøre) at vi kan tenke på en enkeltrekke som vi har tippet på, som om den var tilfeldig trukket fra de K rekkene i tabell 1 der alle de K mulige rekkene har samme sannsynlighet.

Tabell 1 $K \times$ sannsynligheten for en gitt kombinasjon av vinnertall og tilleggstall i en vilkårlig enkeltrekke.

Antall vinnertall	Antall tilleggstall		
	0	1	Sum
0	657 800	230 230	888 030
1	1 611 610	460 460	2 072 070
2	1 381 380	313 950	1 695 330
3	523 250	91 000	614 250
4	91 000	11 375	102 375
5	6 825	546	7 371
6	182	7	189
7	1	0	1
Sum	4 272 048	1 107 568	5 379 616

A. For en enkeltrekke vi tipper på, la *A* betegne begivenheten at rekken oppnår femte-premie (dvs. 4 vinnertall), og *B* begivenheten at rekken oppnår en høyere utbetaling enn femte-premie (dvs. premie 1, 2, 3 eller 4).

i) Forklar hvorfor $P(A) = 0{,}019$ med tre desimalers nøyaktighet.

ii) Finn $P(B)$ og $P(A \cup B)$.

iii) Finn $P(A \mid A \cup B)$.

<<< **Svar:** **i):** *A* kan inntreffe på to måter i tabellen, 4 vinnertall pluss 0 eller 1 tilleggstall.

Hvorav $P(A) = \dfrac{91000 + 11375}{K} = \dfrac{102375}{5379616} = 0.0190302 \approx 0.019$

ii): $P(B) = \dfrac{7371 + 189 + 1}{K} = \dfrac{7561}{K} = 0.0014..,\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.0204...$

iii): $P(A \mid A \cup B) = \dfrac{P\left(A \cap (A \cup B)\right)}{P(A \cup B)} = \dfrac{P\left(A\right)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.019}{0.0204} = 0.931...$

>>>

B. **i)** Ved trekningen trekkes de 7 vinnertallene først. Trekningen foregår ved at tallene trekkes ett og ett slik at ved hver trekning har alle de gjenværende tallene samme sjanse for å bli trukket. Det kan vises (som du ikke trenger å gjøre) at utvalget på 7 tall dermed blir rent tilfeldig slik at alle ikke-ordnete utvalg på 7 har samme sannsynlighet for å bli trukket.

Forklar hvorfor sannsynligheten for at tallet 2 blir trukket ut som vinnertall er $7/34$.

ii) La Y være antall ganger tallet 2 blir trukket ut som vinnertall i løpet av et år (dvs. 52 spilleomganger). Forklar hvorfor Y er binomisk fordelt.

iii) Vis at sannsynligheten for at Y ligger mellom 4 og 18, endepunktene medregnet, er tilnærmet 0,99.

<<< **Svar:** **i):** Flere alternative løsninger: (1) Hypergeometrisk:

$$P(2 \text{ blir trukket}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{33}{6}}{\binom{34}{7}} = \frac{33!}{6!\ 27!} \cdot \frac{7!\ 27!}{34!} = \frac{7}{34}$$

(2) Alternativt kan vi tenke oss 7 plasser som de uttrukne tallene plasseres i. Begivenheten at 2 blir trukket betyr at 2 havner på en av de 7 plassene. De 7 mulighetene, som er disjunkte, har hver sannsynlighet $1/34$, hvorav endelig sannsynlighet $7/34$.

ii): Det er nok å vise til at sannsynligheten for at 2 blir trukket ut er konstant i hver spilleomgang og at resultatene fra forskjellige spilleomganger er uavhengige. Dermed $Y \sim \text{bin}(52,\ 7/34)$.

iii): $E(Y) = 52\frac{7}{34} \approx 10,71, \quad \text{var}(Y) = 52\frac{7}{34}\left(1-\frac{7}{34}\right) \approx 8,5017$, som, etter regel 5.20 i Løvås, impliserer at Y er tilnærmet normalfordelt, $Y \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(10,71;\ \sqrt{8,5017})$.

Dermed $P(Y \le 3) \approx G\left(\frac{3-10,71}{\sqrt{8,5017}}\right) = G(-2,64) = 0,0041$ og

$$P(Y \le 18) \approx G\left(\frac{18-10,71}{\sqrt{8,5017}}\right) = G(2,50) = 0,9938, \text{ som gir}$$

$$P(4 \le Y \le 18) \approx 0,9897 \approx 0,99$$

(Med heltallskorreksjon får vi $P(Y \le 3) \approx G\left(\frac{3,5-10,71}{\sqrt{8,5017}}\right) = G(-2,47) = 0,0068$ og

$$P(Y \le 18) \approx G\left(\frac{18,5-10,71}{\sqrt{8,5017}}\right) = G(2,67) = 0,9962 \quad \text{og}$$

$$P(4 \le Y \le 18) \approx 0,9894 \approx 0,99 \quad)$$

\>>

C. Anta Hansen vil spille fast 50 fri rekker hver uke. Med *fri rekker* mener vi tilfeldig valgte forskjellige enkeltrekker. La X være antallet av disse enkeltrekkene som vinner femte-premie i en enkel uke (som svarer til en spilleomgang).

i) Forklar kort hvorfor det er rimelig å anta at X er tilnærmet poisson-fordelt med parameter 0,95 (skrevet kort: $X \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} \text{pois}(0,95)$).

[**Hint.** La A_i være begivenheten at rekke nr. i blant Hansens 50 rekker vinner femte-premie i den aktuelle spilleomgangen. Du kan her anta at $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ er stokastisk uavhengige begivenheter siden populasjonen av mulige rekker av 7 vinnertall er stor.]

ii) For en enkel uke (en spilleomgang), finn de to sannsynlighetene (tilnærmet eller eksakt ut fra dine forutsetninger) for å få 0 og for å få 2 femte-premier med Hansens 50 rekker.

iii) Hva er forventet antall femte-premier pr. uke?

<<< **Svar: i):** Ifølge tabell 1 er sannsynligheten for at en vilkårlig enkeltrekke skal vinne femte-premie lik $P(\text{femte-premie}) = \dfrac{102375}{5379616} = 0.019$. Dermed er for alle i $P(A_i) = 0,019$. Siden $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ er uavhengige, følger at $X = \text{antall } A_i\text{-er som inntreffer}$, må være binomisk fordelt, $X \sim \text{bin}(50,\ \ p = 0,019)$. Siden n = 50 er relativt stor og $p = 0,019$ er relativt liten, er X tilnærmet poisson-fordelt med parameter, $np = 50(0,019) = 0,95$. Med våre antakelser er det rimelig å kalle den binomiske fordelingen den «eksakte» fordelingen og poisson-fordelingen den tilnærmete.

ii): Kandidaten kan velge en av to løsninger her (som begge er akseptable):

(1) Den tilnærmete løsningen basert på $X \sim \text{pois}(0,95)$:

$$P(X = 0) = \frac{0,95^0}{0!} e^{-0,95} = 0,387 \quad \text{og} \quad P(X = 2) = \frac{0,95^2}{2!} e^{-0,95} = 0,175 .$$

(2) Den «eksakte» løsningen basert på $X \sim \text{bin}(50,\ 0,019)$:

$$P(X = 0) = \binom{50}{0} (0,019)^0 (0,981)^{50} = 0,981^{50} = 0,383$$

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} (0,019)^2 (0,981)^{48} = 25 \cdot 49 \cdot (0,019)^2 (0,981)^{48} = 0,176$$

iii): Enten man bruker den tilnærmete eller den «eksakte» løsningen, blir $E(X) = np = 50(0,019) = 0,95 \approx 1$ rekke av 50 .

\>>>

D. **i)** Hansen vil, som sagt, spille fast 50 fri rekker hver uke. Hva er sannsynligheten for at det går mer enn 3 uker før hun får sin første femte-premie?

ii) Hva er forventet tid (i antall uker) det tar til den første femte-premien?

<<< **Svar: i):** Vi har her en binomisk forsøksrekke der forsøk nr. i er trekningen uke i, som gir uavhengige forsøk, og der suksess-begivenheten i hvert enkelt forsøk er at

de 50 rekkene inneholder minst en femte-premie – med konstant (tilnærmet) sannsynlighet

$p = P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,387 = 0,613$ (eller «eksakt», 1-0,383=0,617).

Vi får

$P(\text{mer enn 3 uker til første femte-premie}) = P(X = 0 \text{ i uke 1,2 og 3}) =$

$= (1-p)^3 = 0,387^3 = 0,058$ ("eksakt" $0,313^3$= 0,056)

ii): Hvis Y er antall uker til første femte-premie, er Y geometrisk fordelt med forventning $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,613} = 1,63$ (uker) ("eksakt", $\frac{1}{0,617} = 1,62)$.

>>>

E. Hansen ombestemmer seg. Hun vil spille et fast antall (ikke nødvendigvis 50) fri rekker hver uke. Hver rekke koster 5 kr. Hun vil at ukesutgiften skal være gjennomsnittlig ca. 100 kr. Med *ukesutgift* menes her netto utgift, dvs. det som rekkene koster minus det hun vinner.

i) Anta først, for enkelthets skyld, at det man får utbetalt for en femte-premie er et fast beløp 48 kr. som gjelder hver uke[1]. Hvor mange fri rekker vil i så fall gi en forventet ukesutgift på ca. 100 kr., når du ser bort fra muligheten å vinne noe mer enn femte-premier?

ii) I virkeligheten varierer størrelsen på utbetalingen for femte-premien fra uke til uke. Undersøk om svaret (antall rekker) blir annerledes dersom utbetalingen, G, for en femte-premie antas å være stokastisk med forventning 48 kr. Du kan anta at G er uavhengig av antall femte-premier som Hansen får på sine rekker en vilkårlig uke.

<<< **Svar:** **i):** La nå X være antall femte-premier i en enkel spilleomgang med R fri rekker. Som før er X binomisk fordelt, $X \sim \text{bin}(R,\ 0,019)$ med forventning $E(X) = R \cdot (0,019)$. (Poisson-tilnærmelsen mer tvilsom her siden R kan være for liten.)

Ukesutgiften blir da $5R - 48X$, og Hansens krav gir

$100 = E\left(5R - 48X\right) = 5R - 48E(X) = (5 - 48 \cdot 0,019)R = (5 - 0,912)R = 4,088R$

hvorav

$$R = \frac{100}{4,088} = 24,5$$

Valget blir da mellom $R = 24$ rekker (med forventet ukesutgift litt mindre enn 100), eller $R = 25$ (med forventet ukesutgift litt større enn 100).

---

[1] Beløpet på 48 kr. er framkommet som et antatt gjennomsnitt for femte-premiene (som i virkeligheten stort sett varierer blant de to beløpene 45 kr. og 50 kr.)

ii): Ukesutgiften blir nå $5R - GX$. Siden G og X er uavhengige, gir regel 4.18 at $E(GX) = E(G)E(X) = 48E(X)$, og Hansens krav gir samme løsning siden:

$$100 = E\left(5R - GX\right) = 5R - E(GX) \overset{\text{regel 4.18}}{=} (5R - 48E(X)) = (5 - 48 \cdot 0{,}019)R =$$

$$= (5 - 0{,}912)R = 4{,}088R$$

som gir samme løsning som i **(i).**

>>>

Oppgave 2

I denne oppgaven vender vi tilbake til Lotto og skal se på utbetalingene for femte-premien som varierer i nærheten av 50 kr. Femte-premien vinnes for en rekke som har 4 vinnertall og representerer det minste beløpet man kan vinne på en rekke ved å spille i Lotto (se innledningen til oppgave 1).

Tabell 2 viser de faktiske utbetalingene for femte-premien i ett år, fra 14. mai 2016 til 14.mai 2017, en periode som omfatter 52 spilleomganger (uker). I denne perioden forekom kun tre verdier som utbetaling for femte-premien. For eksempel, fikk man 50 kr. for femte-premien i 32 av de 52 ukene. Hvis x_i betegner beløpet som man får for en femte-premie i uke i i perioden ($i = 1, 2, \ldots, 52$), sier tabell 2 at 32 av x_i-ene er lik 50 kr.

Tabell 2 Data for femte-premien i perioden fra 14/5-2016 til 14/5-2017

Utbetaling for femte-premie	Antall uker
45 kr.	19
50 kr.	32
55 kr.	1
Sum	52

Vi antar at $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ er observasjoner av stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$, som antas å være uavhengige og identisk fordelte med ukjent forventning, $E(X_i) = \mu$, og ukjent varians, $\text{var}(X_i) = \sigma^2$.

A. **i)** Beregn medianen i utvalget $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ og vis at gjennomsnittet er $\overline{x} = 48{,}27$ (med to desimalers nøyaktighet).

ii) Beregn utvalgsvariansen, $s^2 = \dfrac{1}{51}\sum_{i=1}^{52}(x_i - \overline{x})^2$.

iii) Sett opp en forventningsrett estimator for μ og forklar hvorfor den er forventningsrett. Hva blir estimatet for μ ?

iv) Forklar kort hva som er forskjellen mellom begrepene «estimator» og «estimat».

<<< **Svar:** **i):** Ordnes data etter størrelse, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(52)}$, ser vi at de to midterste $x_{(26)}$ og $x_{(27)}$ begge er 50, som gir median = 50.

$$\bar{x} = \frac{1}{52}\sum_{i=1}^{52} x_i = \frac{1}{52}\left(19 \cdot 45 + 32 \cdot 50 + 55\right) = \frac{2510}{52} = 48,27$$

ii):

$$s^2 = \frac{1}{51}\sum_{i=1}^{52}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{51}\left(19 \cdot (45 - 48,27)^2 + 32 \cdot (50 - 48,27)^2 + (55 - 48,27)^2\right) =$$

$$= \frac{203.1651 + 95.7728 + 45.2929}{51} = \frac{344.2308}{51} = 6.7496$$

iii): $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{52}\sum_{i=1}^{52} X_i$ er forventningsrett siden $E(\hat{\mu}) = \frac{1}{52}\sum_{i=1}^{52} E(X_i) = \frac{1}{52} 52\mu = \mu$.

Estimatet er den observerte verdien $\hat{\mu}_{obs} = \bar{X}_{obs} = \bar{x} = 48,27$

iv) En estimator er en observerbar stokastisk variabel med statistiske egenskaper som ligger i sannsynlighetsfordelingen for estimatoren. Estimatet er bare et tall som regnes ut ved at data settes inn i estimator-formelen (såkalt observert verdi).

\>>>

B: **i)** Sett opp en formel for et konfidensintervall for μ som har konfidensgrad tilnærmet 90% og beregn det observerte intervallet basert på data i tabell 2.

ii) Forklar kort hvorfor konfidensgraden til konfidensintervallet i **(i)** er tilnærmet 0,90.

iii) Observasjonsperioden bak data i tabell 2 er ett år (52 uker). Anslå hvor mange år vi trenger data fra dersom vi ønsker at konfidensintervallet i **(i)** skal ha lengde ca. 0,5?
[**Hint.** Ta utgangspunkt i et Z-intervall der du regner som om $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ var kjent lik s^2.]

<<< **Svar:** **i):** Teorien for konfidensintervall i uid-modellen, som antas her, er utilstrekkelig (og delvis feilaktig) beskrevet i Løvås. Løvås anbefaler, som de fleste computer-pakker, et T-intervall for denne situasjonen selv for store *n*. Da blir formelen

$\bar{X} \pm t_{0,05}\frac{S}{\sqrt{52}} \quad \approx \quad \bar{X} \pm (1,676)\frac{S}{\sqrt{52}}$, der $t_{0,05}$ er 0,05- kvantilen i $t(51)$. Denne står ikke i tabell E5 i boka, men er tilnærmet lik 0,05-kvantilen i $t(50)$ $(=1,676)$.
Alternativt kan man for stor *n* (≥ 30) benytte Z-intervall (med S istedenfor σ) (som Løvås feilaktig sier ikke kan brukes). Dette er presisert i et notat «Oversikt over konfidensintervall» på nettet (kurssiden), og som studentene skal kjenne til. Z-

intervallet blir $\bar{X} \pm z_{0,05}\frac{S}{\sqrt{52}} \quad = \quad \bar{X} \pm (1,645)\frac{S}{\sqrt{52}}$, der $z_{0,05} = 1,645$ er 0,05-kvantilen i N(0, 1). Begge løsninger bør naturligvis aksepteres i besvarelsen.

Beregnet:
t-intervall:

$$\left.\left(\bar{X} \pm (1,676)\frac{S}{\sqrt{52}}\right)\right|_{obs} = 48,27 \pm (1,676)(0.3603) = 48,27 \pm 0.6038 = (47,67;\ \ 48,87)$$

Z-intervall:

$$\left.\left(\bar{X} \pm (1,645)\frac{S}{\sqrt{52}}\right)\right|_{obs} = 48,27 \pm (1,645)(0.3603) = 48,27 \pm 0.5927 = (47,68;\ \ 48,86)$$

ii): Utgangspunktet er at $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{52}}$ er tilnærmet $N(0,1)$ fordelt. Dermed

$$0,90 \approx P\left(-1,645 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{52}} \leq 1,645\right) = \text{L} \ = P\left(\bar{X} - (1,645)\frac{S}{\sqrt{52}} \leq \mu \leq \bar{X} + (1,645)\frac{S}{\sqrt{52}}\right)$$

Hvis man bruker t-intervallet vil konfidensgraden bli ubetydelig større (ubetydelig mer konservativt) siden $t_{0,05} > z_{0,05}$ og tilnærmet like.

iii): Z-intervallet med vilkårlig (større) n og $\sigma = s$ blir $\bar{X} \pm (1,645)\frac{s}{\sqrt{n}}$ (med liten s),

som har lengde $2(1,645)\frac{s}{\sqrt{n}}$. Lengde =0,5 gir

$$2(1,645)\frac{s}{\sqrt{n}} = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{2(1,645)s}{0,5} = 17,09... \quad \Leftrightarrow \quad n = 292,23... \ \text{(uker)}$$

som svarer til 5 år og 31 uker (ca).

>>>

Oppgave 3

Et byggefirma regner med at virksomheten har gjennomsnittlig ca. 3,2 arbeidsuhell pr. uke. Firmaet setter i gang et sikkerhetstiltak for å få ned den gjennomsnittlige frekvensen av arbeidsuhell.

La X være antall arbeidsuhell i en periode på 4 uker etter at sikkerhetstiltaket er avsluttet. Anta at X er poissonfordelt med parameter 4λ (kort skrevet, $X \sim \text{pois}(4\lambda)$), der λ er en ukjent parameter som angir forventet antall uhell pr. uke etter sikkerhetstiltaket. Vi ønsker å teste $H_0 : \lambda \geq 3,2$ mot $H_1 : \lambda < 3,2$ basert på X.

A. **i)** Det foreslås en test med forkastningskriterium: «Forkast H_0 hvis $X \leq 7$ ». Beregn signifikansnivået tilnærmet for denne testen. Er betingelsen for akseptabel tilnærming til normalfordelingen oppfylt her?

[Hint. Med «signifikansnivå» menes den største mulige sannsynligheten for feil av type I, dvs., å forkaste H_0 med den foreslåtte testen hvis H_0 $(\lambda \geq 3,2)$ faktisk er sann. Du kan i dette punktet ta som gitt at styrkefunksjonen, $P(\text{forkaste } H_0)$, er en avtagende funksjon av λ .]

ii) Det viste seg at det var 8 arbeidsuhell ved bedriften i de 4 første ukene etter at sikkerhetstiltaket var avsluttet. Beregn p-verdien tilnærmet for denne observasjonen relativt til problemstillingen gitt ved H_0 og H_1. Kommenter svaret.

<<< **Svar:** **i):** Etter regel 5.20 i Løvås er tilnærmelsen $X \sim N(EX, \sqrt{\text{var}(X)}) = N(4\lambda_0, \sqrt{4\lambda_0}) = N(12{,}8;\ \sqrt{12{,}8})$ akseptabel hvis $\text{var}(X) = 4\lambda_0 = 12{,}8 \geq 5$ som er oppfylt her. Svaret for øvrig vil avhenge av om man bruker heltallskorreksjon eller ikke (siden dette ikke spørres om, bør begge varianter aksepteres):

Uten heltallskorreksjon:
Sign.nivået =

$$\alpha = P_{\lambda=3,2}(\text{forkast } H_0) = P_{\lambda=3,2}(X \leq 7) = P_{\lambda=3,2}\left(\frac{X-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}} \leq \frac{7-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}}\right) \approx G\left(\frac{7-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}}\right) =$$

$$= G(-1{,}62) = 0{,}0526$$

Med heltallskorreksjon:

Sign.nivået = $\alpha = P_{\lambda=3,2}(\text{forkast } H_0) = P_{\lambda=3,2}(X \leq 7) \approx G\left(\frac{7{,}5-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}}\right) =$

$$= G(-1{,}48) = 0{,}0694$$

Altså svaret er 5,26% eller 6,94% .
(Det eksakte nivået ifølge Excel er 5,99% (ikke spurt om)).

ii): *P-verdi uten heltallskorreksjon:*

$$\text{P-verdi} = P_{\lambda=3,2}(X \leq X_{obs}) = P_{\lambda=3,2}(X \leq 8) \approx G\left(\frac{8-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}}\right) = G(-1.34) = 0{,}0901$$

P-verdi med heltallskorreksjon:

$$\text{P-verdi} = P_{\lambda=3,2}(X \leq X_{obs}) = P_{\lambda=3,2}(X \leq 8) \approx G\left(\frac{8{,}5-12{,}8}{\sqrt{12{,}8}}\right) = G(-1.20) = 0{,}1151$$

P-verdier på 9% eller 11,5% blir vanligvis ikke tolket som sterk nok evidens til å forkaste H_0 .

Kandidaten bør vel få et ekstra poeng hvis vedkommende påpeker at p-verdien må være større enn det beregnete signifikansnivået, siden $X_{obs} = 8$ ikke gir forkastning med det foreslåtte kriteriet.

>>>

B. **i)** Vis at styrkefunksjonen, som er en funksjon av λ, for testen i punkt **A(i)**, er tilnærmet lik $\gamma(\lambda) = G\left(\frac{7-4\lambda}{\sqrt{4\lambda}}\right) = G\left(\frac{3,5-2\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$, der $G(z)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen i standard normalfordelingen $N(0,1)$, og at tilnærmelsen er velbegrunnet for $\lambda \geq 1,25$.

ii) Vis at den tilnærmete styrkefunsjonen, $\gamma(\lambda)$, er en avtagende funksjon av λ.

iii) Beregn (eventuelt tilnærmet) sannsynligheten for feil av type I og sannsynligheten for feil av type II ved bruk av testen i punkt **A(i)** hvis den sanne verdien av λ er 2.

<<< **Svar:** **i):** For vilkårlig λ er $X \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(EX, \sqrt{\text{var}(X)}) = N(4\lambda, 2\sqrt{\lambda})$, som er en akseptabel tilnærmelse hvis $\text{var}(X) = 4\lambda \geq 5$, dvs. hvis $\lambda \geq 1,25$. Vi får dermed styrkefunksjonen

$$P_\lambda(\text{forkast } H_0) = P_\lambda(X \leq 7) \approx G\left(\frac{7-4\lambda}{\sqrt{4\lambda}}\right) = G\left(\frac{3,5-2\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

veldefinert for $\lambda \geq 1,25$.

ii) Argumentet i G er $h(\lambda) = \frac{3,5-2\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 3,5\cdot\lambda^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda^{\frac{1}{2}}$. Den deriverte er $h'(\lambda) = -\frac{1}{2}\cdot 3,5\cdot\lambda^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\lambda^{-\frac{1}{2}} < 0$ for alle $\lambda \geq 1,25$, som impliserer at $h(\lambda)$ er avtagende. Siden $G(z)$ er voksende i z, følger at, hvis λ øker vil $h(\lambda)$ avta, og dermed $\gamma(\lambda) = G(h(\lambda))$ avta.

iii) Hvis den sanne verdien er $\lambda = 2$, er alternativet H_1 sant og feil av type I er umulig. Dermed blir $P_{\lambda=2}(\text{feil type I}) = 0$. Feil av type II, derimot, inntreffer hvis H_0 ikke forkastes. Hvorav:

$$P_{\lambda=2}(\text{feil type II}) = P_{\lambda=2}(\text{ikke forkast } H_0) \approx 1-\gamma(2) = 1 - G\left(\frac{3,5-4}{\sqrt{2}}\right) = 1 - G(-0,35) =$$

$$= 1 - 0,3632 \approx 0,64 \quad \text{(med to desimaler).}$$

>>>