ECON 2130 2005 VÅR

3. Innleveringsoppgave (frivillig)

Innlevering fredag 29. april (ved siden av SV infosenter 1.etg. ES)

Oppgave 1 (basert på en eksamensoppgave ved NTNU)

Mange mennesker har i dag en lidenskapelig interesse for elitefotball og (såkalte) eksperter har ofte klare meninger om spillet. I denne oppgaven skal vi konsentrere oss om kamper mellom to spesielle lag, som vi betegner henholdsvis som R og L. En ekspertkommentator på fjernsyn kom med følgende påstand om kamper mellom R og L: "Som oftest vil det laget som får det første målet også vinne kampen". I denne oppgaven skal vi regne litt med utgangspunkt i denne påstanden.

For en fotballkamp mellom lagene R og L, la følgende begivenheter være definert:

R: Lag R vinner kampen.
F: Lag R får mål før lag L.
I: Kampen ender målløs, dvs. 0 – 0.

a. I dette punktet skal du anta at P(R) = 0,4, P(F) = 0.5, $P(R \cap F) = 0.3$ og $P(I) = 0.05$.
Tegn begivenhetene R, F og I i et venndiagram.
Bestem sannsynligheten for at lag R vinner gitt at lag R får mål før lag L, dvs. $P(R \mid F)$.
Bestem sannsynligheten for at lag R vinner kampen gitt at kampen ikke ender målløs, dvs $P(R \mid \bar{I})$, hvor $\bar{I}$ betegner komplementærbegivenheten til I.

Vi skal videre kun analysere de kampene mellom R og L som ikke endte målløse. La p være sannsynligheten for at det laget som får det første målet også vinner kampen. Vi forutsetter at denne sannsynligheten ikke avhenger av om det er R eller L som har hjemmekamp. Vi skal estimere p ut fra resultatene i de siste n seriekampene mellom R og L (kun kamper med minst ett mål blir tatt med). La X betegne antall av de n kampene hvor laget som fikk det første målet også vant kampen. Vi antar at X er binomisk fordelt med parametre n og p og bruker estimatoren

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

b. Hva er de generelle forutsetningene for en binomisk fordeling? Mener du det, ut fra dette, er rimelig å anta at *X* er binomisk fordelt? (begrunn svaret).

c. Fra teorien vet vi at hvis *n* er så stor at $np(1-p) \geq 5$, så er *X* tilnærmet normalfordelt, dvs. tilnærmet ~ $N(\mathrm{E}(X), \mathrm{SD}(X)) = N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Forklar hvorfor vi av dette kan slutte at

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$ er tilnærmet standard normalfordelt, dvs $N(0,\ 1)$ for stor *n*.

Da ekspertkommentatoren som ble nevnt i begynnelsen av oppgaven ble bedt om å konkretisere sin påstand om at i kamper mellom R og L er det som oftest laget som får det første målet som vinner kampen, sa han at sannsynligheten *p* er minst lik 0,80. Vi ønsker nå å undersøke om vår observerte verdi av *X* gir grunnlag for å si at ekspertens uttalelse er feil.

d. Formuler dette som et hypotesetestingsproblem. Velg signifikansnivå 5% og bestem en regel for når H_0 skal forkastes.
Hva blir konklusjonen på testen når $n = 24$ og $x = 17$? (Dette er resultater fra kamper mellom Rosenborg og Lillestrøm i perioden 1990 – 2001. Ingen av disse kampene endte forøvrig målløse.)

e. Anta at forkastningsregelen fra **d.** benyttes (eventuelt justert hvis *n* er noe annet enn 24)., men at *p* i virkeligheten er 0,7. Hvor mange kampobservasjoner må man da ha for at sannsynligheten for å oppdage at ekspertens uttalelse er feil skal være minst 0,9?

Oppgave 2

Den gjennomsnittlige tørketiden for en type spray-maling er kjent som 90 sekunder. Forskningsavdelingen ved selskapet som produserer malingen tror at man kan redusere tørketiden ytterligere ved å tilsette et visst stoff (A) til malingen. For å undersøke om det er hold i dette ble maling tilsatt med A sprayet på 15 flater og resulterende tørketid for hver av flatene notert. Gjennomsnitt og standardavvik for disse 15 målingene ble henholdsvis 86 sekunder og 4,5 sekunder. Basert på tidligere erfaring er det rimelig å anta at tørketiden er normalfordelt.

a. Gir disse dataene sterk evidens for at gjennomsnittlig (forventet) tørketid blir redusert ved tilsetning av A? Presiser modellen. Sett opp en test og gjennomfør denne med signifikansnivå 1%. Er p-verdien for testen din større eller mindre enn 1%?

b. Beregn et 98% konfidensintervall for forvent tørketid for slik maling med tilsatt A.