

Econ 2130 vår 2013

Seminaroppgaver for uke 12

Eksamen Econ 2130, 2004 høst: Oppgave 3

Eksamen Econ 2130, 2008 vår – utsatt: Oppgave 1, 2, 3

pluss

Ekstraoppgave 1 (Om summer)

Det kryr av summer i økonometri, så det er like greit å venne seg til dem først som sist.

Oppvarmingsøvelse

La x_{ij} , $i=1,2,\dots,4$ $j=1,2,\dots,5$, være 20 tall gitt i tabellen. Merk at indeksen i står for rad nr. i i tabellen mens j står for kolonne nr. j . Dermed har vi, for eksempel (sjekk), $x_{12} = -1$, $x_{21} = 2$, og $x_{43} = 0$ og $\sum_{j=2}^4 x_{3j} = x_{32} + x_{33} + x_{34} = -4 + 1 + 1 = -2$.

x_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	Sum
$i=1$	1	-1	0	2	3	5
$i=2$	2	1	-3	1	-4	-3
$i=3$	5	-4	1	1	-1	2
$i=4$	-2	0	0	2	2	2
Sum	6	-4	-2	6	0	6

1. Sjekk at $\sum_{i=1}^4 x_{i2} = -4$, $\sum_{i=2}^3 x_{i2} = -3$, $\sum_{i=1}^4 x_{i5} = 0$
2. Sjekk at $\sum_{j=1}^5 x_{1j} = 5$, $\sum_{j=1}^5 x_{4j} = 2$, $\sum_{j=3}^5 x_{2j} = -3$, $\sum_{j=3}^5 x_{2j} = -6$
3. Sjekk at $\sum_{i=1}^4 x_{ii} = x_{11} + x_{22} + \dots = 5$, $\sum_{i=1}^4 x_{i4}^i = 20$, $\sum_{i=1}^4 x_{i2}^i = -64$
4. Sjekk at $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 6$

[**Merknad.** Merk at den første dobbeltsummen betyr

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = \sum_{i=1}^4 \left[\sum_{j=1}^5 x_{ij} \right] = \sum_{i=1}^4 [x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{i5}]$$

som betyr at vi summerer tallene i tabellen radvis. Tilsvarende betyr den andre summen at vi summerer tallene i tabellen

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 x_{ij} = \sum_{j=1}^5 \left[\sum_{i=1}^4 x_{ij} \right] = \sum_{j=1}^5 [x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j}]$$

Det spiller altså ingen rolle om vi summerer tallene i en tabell radvis eller kolonnevis.]

Innledning: Noen regler for summer

- (a) Ifølge en viktig regel for summer betyr $\sum_{i=1}^n 2x_i - 3$ det samme som

$(2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n) - 3$. Med andre ord, -3 hører ikke med under summetegnet. Om man ønsker at -3 skal være med under summetegnet, må man bruke parentes:

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - 3) = 2x_1 - 3 + 2x_2 - 3 + \dots + 2x_n - 3 = (2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n) - 3n.$$

Regelen kan beskrives slik: Hvis et uttrykk(i) (for eksempel $2x_i - 3$) i summen,

$\sum_{i=1}^n \text{uttrykk}(i)$, selv er en sum bestående av flere ledd (i eksempelet er det to ledd, $2x_i$

og 3), gjelder summetegnet **kun for det første leddet** – altså til første pluss eller minus (mellom ledd) dukker opp i uttrykket. Hvis man ønsker at summetegnet skal omfatte mer enn bare første ledd, må man bruke parentes.

- (b) Hvis c er en konstant, er $\sum_{i=1}^n c = nc$

$$\left[\sum_{i=1}^n c = \overbrace{c + c + \dots + c}^n = nc \right]$$

- (c) En felles faktor i en sum kan settes utenfor summen: $\sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$

$$\left[cx_1 + cx_2 + \dots + cx_n = c \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right]$$

- (d) Hvis a, b, c, d er konstanter, gjelder

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i + dz_i) = na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n y_i + d \sum_{i=1}^n z_i$$

[En måte å se dette på er å skrive ut summen til venstre, ordne om på leddene og bruke (c). Vi vet jo at endring av rekkefølgen av leddene i en sum ikke endrer summen, som for eksempel, $3 - 5 = -5 + 3$. Skrevet ut får vi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i + dz_i) &= \\ &= a + bx_1 + cy_1 + dz_1 + a + bx_2 + cy_2 + dz_2 + \dots + a + bx_n + cy_n + dz_n = \\ &= a + \dots + a + bx_1 + bx_2 + \dots + bx_n + cy_1 + cy_2 + \dots + cy_n + dz_1 + dz_2 + \dots + dz_n = \end{aligned}$$

$$\stackrel{(c)}{=} na + b[x_1 + x_2 + \dots + x_n] + c[y_1 + y_2 + \dots + y_n] + d[z_1 + z_2 + \dots + z_n]$$

som er lik uttrykket til høyre i (1). Merk også at parentesen i uttrykket til venstre i (1) spiller en viktig rolle. Uten parentes ville ifølge (a) summen bare inkludere første ledd

$$\text{som er } a. \text{ Vi ville fått } \sum_{i=1}^n a + bx_i + cy_i + dz_i = na + bx_i + cy_i + dz_i \quad]$$

- (e) Multiplikasjon av summer: $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right)$

[**Bevis:** Merk at dobbeltsummen til venstre betyr $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n a_i b_j \right]$, dvs.

at vi først summerer over i (i den innerste summen) mens vi holder j fast. Deretter summerer vi over j . Resultatet får vi så av regel (c) som følger:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n a_i b_j \right] = \sum_{j=1}^m [a_1 b_j + a_2 b_j + \dots + a_n b_j] = \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{j=1}^m b_j [a_1 + a_2 + \dots + a_n] \stackrel{(c)}{=} [a_1 + a_2 + \dots + a_n] \cdot \sum_{j=1}^m b_j \end{aligned}$$

siden $[a_1 + a_2 + \dots + a_n]$ er en felles faktor i den nest siste summen og som derfor kan

settes utenfor ifølge (c). Det siste uttrykket er ikke noe annet enn $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right)$!

Oppgave:

1. Vis regel 4.18 i tilfellet $n = 2$. M.a.o., anta at X og Y er stokastisk uavhengige og diskrete. Vis at i så fall gjelder $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

[**Hint:** Bruk (e). Ta utgangspunkt i definisjon 4.16 og i formelen rett etter definisjon 4.13. Anta den marginale fordelingen til X er gitt ved $P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

og for Y ved $P(Y = y_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Skriv den simultane

punktsannsynlighetsfunksjonen for (X, Y) som

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ og } j = 1, 2, \dots, m. \text{ Sett}$$

$$a_i = x_i P(X = x_i) \text{ og } b_j = y_j P(Y = y_j) \text{ i (e) ovenfor.]}$$

2. Forklar hvorfor uavhengighet mellom X og Y impliserer at $\text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$, der ρ står for korrelasjonskoeffisienten.
3. Skriv formel (4.18) i regel 4.17 med summetegn.

[**Merknad.** Det er viktig å merke seg at alle reglene og definisjonene (med unntak av definisjon 4.16) 4.12 – 4.18 gjelder for både kontinuerlige og diskrete stokastiske variable (jfr. Løvås øverst side 139). Det kontinuerlige tilfellet krever noen matematiske definisjoner og presiseringer som ikke er pensum i dette kurset, men det er i høy grad pensum å kjenne reglene. De vil bli flittig brukt både i forelesninger, oppgaver og til eksamen...]

AUS: (“Anbefalt utenfor seminar” – sensorveiledning på nettet):

Eksamen Econ 2130, 2004 vår: Oppgave 1

Eksamen Econ 2130, 2004 vår – utsatt: Oppgave 2