HG
April 2013

Løsningskisse seminaroppgaver uke 15

Oppg. 5.6

La X = antall barn i utvalget som har lærevansker. Andel barn med lærevansker i populasjonen av barn antas å være $p = 0{,}15$. Utvalgsstørrelsen er $n = 900$. Utvalget antas å være et rent tilfeldig utvalg trukket fra populasjonen. I så fall er X egentlig hypergeometrisk fordelt, men siden populasjonen er stor, kan vi uten vesentlig tap av realisme anta en binomisk modell for X (jfr. supplement til forelesningen 19. mars på nettet):

Modell: $X \sim \text{bin}(n, p) = \text{bin}(900;\ 0{,}15)$

Vi skal finne $P(115 \le X \le 150)$. Betingelsene i regel 5.20 er opplagt oppfylt, og vi kan utnytte at X er tilnærmet normalfordelt:

$$X \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N\left(E(X), \sqrt{\text{var}(X)}\right) = N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) = N\left(135;\ 10{,}71214\right)$$

Siden X bare kan anta hele verdier, er begivenheten $(X \ge 115)$ ekvivalent med $(X > 114)$, og vi får (ved hjelp av $G(z) = P(Z \le z)$ der $Z \sim N(0,1)$):

$$P(115 \le X \le 150) = P(114 < X \le 150) = P(X \le 150) - P(X \le 114) \approx$$
$$\approx G\left(\frac{150-135}{10{,}71214}\right) - G\left(\frac{114-135}{10{,}71214}\right) = G(1{,}40) - G(-1{,}96) \overset{\text{tabell D.3}}{=} 0{,}9192 - 0{,}0250$$
$$= 0{,}8942$$

Oppg. 5.7

Dette er klart en hypergeometrisk situasjon med liten populasjon bestående av $N = 8$ biler, hvorav $M = 3$ er defekte, og $N - M = 5$ er ok. Et rent tilfeldig utvalg på $n = 4$ biler trekkes, og Y er antall defekte biler i utvalget. Siden utvalget er rent tilfeldig, er Y hypergeometrisk fordelt med sannsynlighetsfunksjon

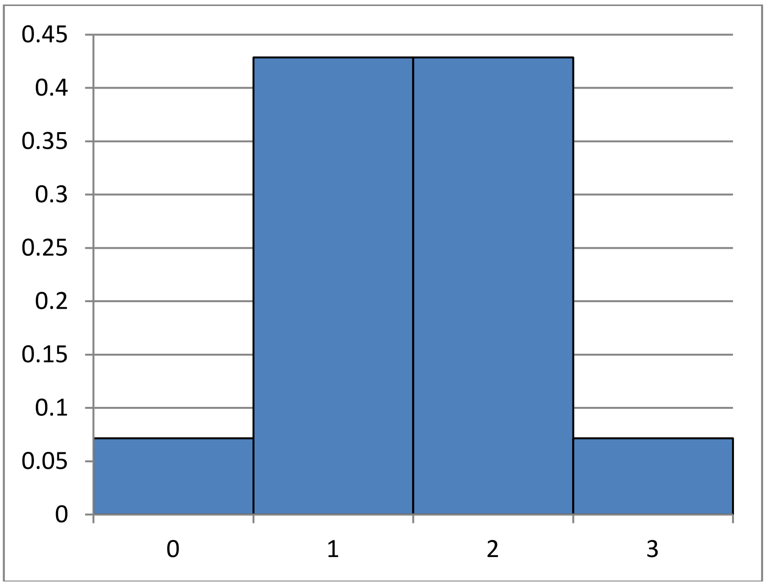
$$P(Y = y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{5}{4-y}}{\binom{8}{4}} \qquad y = 0, 1, 2, 3$$

Vi får $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ og tilsvarende for andre binomialkoeffisienter og dermed følgende tabell over fordelingen (sjekk):

y	$\binom{3}{y}\binom{5}{4-y}$	$P(Y=y)$
0	5	$\frac{5}{70}$ $(=0.071)$
1	30	$\frac{30}{70}$ $(=0.429)$
2	30	$\frac{30}{70}$ $(=0.429)$
3	5	$\frac{5}{70}$ $(=0.071)$

Dermed $\quad P(Y=y) = \frac{3}{7}$

Histogrammet :



Oppg. 5.9

Populasjonen består av $N = 64$ elger hvorav $M = 14$ er merket. I alt $n = 8$ blir skutt og antall av disse som er merket, er en tilfeldig størrelse som vi for eksempel kaller Y. Hvis vi antar at det ikke er lettere å oppdage (og skyte) elger som er tidligere merket enn andre, kan vi anta at utvalget (de som ble skutt) er et rent tilfeldig utvalg. I så fall er Y hypergeometrisk fordelt med sannsynlighetsfunksjon

$$P(Y=y)=\frac{\binom{14}{y}\binom{50}{8-y}}{\binom{64}{8}} \qquad y=0,1,2,\ldots,8$$

Antall mulige utvalg på 8 er $\binom{64}{8}=$ 4 426 165 368 (beregnet med COMBIN-funksjonen i Excel).

Tilsvarende finner vi (med Excel eller med kalkulator som har bin.koeffisienter)

y	$\binom{14}{y}\binom{50}{8-y}$	$P(Y=y)$
0	536 878 650	0.1213
1	1 398 381 600	0.3159
2	1 446 053 700	0.3267
3	771 228 640	0.1742
	Sum	0.9382

Vi finner for eksempel

$$P(Y=3)=\frac{771\ 228\ 640}{4\ 426\ 165\ 368}=0.1742$$

og

$$P(Y\le 3)=\sum_{y=0}^{3}P(Y=y)=0.9382$$

Oppg. 5.10

Nå består populasjonen av $N=640$ elger hvorav $M=140$ er merket. Utvalget (de som blir skutt) er fortsatt $n=8$, hvorav Y er merket. Hvis vi antar at utvalget er rent tilfeldig, er Y hypergeometrisk fordelt,

$$P(Y=y)=\frac{\binom{140}{y}\binom{500}{8-y}}{\binom{640}{8}} \qquad y=0,1,2,\ldots,8$$

Antall mulige utvalg på 8 er $\binom{640}{8}=$ 668 104 241 028 785 000 (beregnet med COMBIN-funksjonen i Excel).

Vi kan nå lage samme tabell som i oppgave 9 og beregne de eksakte hypergeometriske sannsynlighetene, men tallene blir betydelig større her og vanskeligere å håndtere. Men teorien sier (jfr. supplement til forelesning 19. mars) at , når populasjonen er stor, vil Y være tilnærmet binomisk fordelt med suksess-sannsynlighet, $p=M/N=140/640=0.21875$, og antall forsøk, $n=8$. (Dvs $Y \overset{\text{Tilnærmet}}{\sim} \text{bin}(8,\ 0.21875)$). Denne tilnærmelsen er noe enklere å beregne

$$P(Y=y)\approx\binom{8}{y}p^y(1-p)^{8-y} \text{ der } \quad p=0.21875$$

Med COMBIN og BINOM.DIST funksjonene i Excel får vi tabellen med eksakt (hypergeometrisk) og tilnærmet (binomisk) beregning (kunne også brukt HYPGEOM.DIST funksjonen direkte):

y	$\binom{140}{y}\binom{500}{8-y}$	Eksakt $P(Y=y)$	Tilnærmet $P(Y=y)$
0	91 579 127 515 482 700	0.1371	0.1388
1	208 049 944 862 760 000	0.3114	0.3109
2	204 891 291 853 710 000	0.3067	0.3046
3	114 242 417 276 008 000	0.1710	0.1706
	Sum ($P(Y\le 3)$)	0.9261	0.9249

Vi ser at den binomiske tilnærmelsen gir ganske bra resultater.

Oppg. 5.12

Lottotrekninger gjentar seg hver uke og resultatene fra forskjellige uker er uavhengige av hverandre. Trekningene kan betraktes som en binomisk forsøksrekke, der i hvert forsøk (uke) observeres om begivenheten $S=$"lykketallet trekkes ut" eller ikke. Sannsynligheten $p=P(S)=7/34$ er konstant hver uke og resultatene fra forskjellige uker er uavhengige. Hvis Z er antall forsøk (uker) til første gang S dukker opp, er Z geometrisk fordelt (jfr avsnitt 5.4 i Løvås), med sannsynlighetsfunksjon

$$P(Z=z)=(1-p)^{z-1}p \qquad z=1,2,3,\ldots$$

som gir

$$P(Z=3)=(1-p)^2\,p=\left(\frac{27}{34}\right)^2\frac{7}{34}=0.130$$

og, ifølge regel 5.6: $\qquad E(Z)=\frac{1}{p}=\frac{34}{7}=4.9\quad$ uker.

Sannsynlighetsfordelingen (uttrykt ved histogrammet) blir akkurat som i figur 4.5 siden sannsynlighetene er beregnet på samme måte og med samme $p=7/34=0.206$ som i figur 4.5.

Oppg. 5.13

Vi har også her en geometrisk fordeling. La S stå for $S=$"lykkes en dag". Oppgitt $p=P(S)=0.001$. Hvis X er antall dager til Kari lykkes, antas (som modell) at X er geometrisk fordelt, som impliserer

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.001}=1000 \text{ dager.}$$

Som i eksempel 5.6 side 167, får vi

$$P(\text{lykkes i løpet av et år})=P(X\le 365)=1-(1-p)^{365}=1-0.999^{365}=0.306$$

Eksamen Econ2130, 2008 vår, oppg. 1 A-D

Utdrag fra sensorveiledningen:
Svarene er kort skissert mellom << …. >>.

Oppgave 1

Vi har en kortstokk bestående av 6 kort. På 2 av disse står det skrevet JA på forsiden mens det står NEI på forsiden av de 4 andre kortene. Hvis man får se kortet med baksiden vendt mot seg, er det ikke mulig å se om det står JA eller NEI på forsiden.

A. Anta kortstokken blir stokket godt og lagt ned på bordet i en bunke med baksiden opp.

(i) Hva er sannsynligheten for at det øverste kortet i bunken er et JA-kort?

(ii) Hva er sannsynligheten for at de to øverste kortene i bunken begge er JA-kort?

<<**Svar:** (i): $1/3$ (ii): $1\Big/\binom{6}{2} = 1/15$ >>

B. La generelt A og B være to begivenheter. Da gjelder

(1) $$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

(i) Forklar relasjonen (1) ved et Venn-diagram.

(ii) Anta $P(A) = \dfrac{4}{5}$ og $P(B \mid A) = \dfrac{1}{4}$. Hva blir da $P(A \cap \overline{B})$?

(iii) Anta at sannsynlighetene oppgitt i (ii) fortsatt gjelder. Hvilken verdi må $P(B)$ ha hvis A og B er uavhengige begivenheter? Hva blir i så fall $P(A \cup B)$?

<<**Svar:** (ii): $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B \mid A) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{5}$.

(iii): Uavhengighet hvis $P(B) = P(B \mid A) = \dfrac{1}{4}$. I så fall

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{20} = 0{,}85$ >>

C. Vi vender tilbake til situasjonen i punkt **A**. La J_1 være begivenheten at det øverste kortet i bunken er et JA-kort, og J_2 begivenheten at det nest øverste kortet er et JA-kort. Forklar intuitivt, eller ved en beregning, at $P(J_2) = P(J_1) = \dfrac{1}{3}$.

<< **Svar:**

$P(J_2) = P(J_1)P(J_2 \mid J_1) + P(N_1)P(J_2 \mid N_1) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{15}(1+4) = \dfrac{1}{3}$ >>

D. Kortstokken stokkes grundig og legges som før på bordet i en bunke med baksiden opp. Ett og ett kort åpnes deretter fra toppen av bunken og nedover inntil første JA-kort dukker opp. La X være antall kort som må snus inntil første JA-kort dukker opp. Hvis kortstokken er grundig nok stokket, vil alle mulige rekkefølger av kortene i bunken ha samme sannsynlighet, og den stokastiske variabelen X vil ha en fordeling gitt i tabell 1:

Tabell 1 *Fordelingen for X*

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

(i) Vis at $P(X = 3) = \dfrac{3}{15}$ som gitt i tabellen.

[**Hint:** Merk at begivenheten $(X = 3)$ er ekvivalent med begivenheten $N_1 \cap N_2 \cap J_3$ - dvs. der de to øverste kortene er NEI-kort og det tredje kortet ovenfra et JA-kort (der begivenheten N_i betyr at i-te kort fra toppen er et NEI-kort).]

(ii) Vis at $E(X) = \dfrac{7}{3}$ og $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{14}{9}$.

<< **Svar:** (i) $P(X=3) = P(N_1)P(N_2 \mid N_1)P(J_3 \mid N_1 \cap N_2) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{15}$

(ii)

$$E(X) = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 4 + \cdots}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}, \qquad E(X^2) = \frac{1^2\cdot 5 + 2^2\cdot 4 + \cdots}{15} = \frac{105}{15} = 7$$

og $\mathrm{Var}(X) = 7 - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{63-49}{9} = \dfrac{14}{9}$ >>