# Statistikk 1
# kapittel 3

Nico Keilman

ECON 2130

Vår 2015

# Kapittel 3 Sannsynlighetsregning

Formål: å kvantifisere usikkerhet ved hjelp av sannsynligheter

Viktige begreper

stokastisk forsøk: et forsøk der utfallet er ukjent; vi kjenner alle mulige utfall; bare ett inntreffer

Stokastisk forsøk kan være bevisst (terningkast, trekker et kort) eller ubevisst (naturen)

et forsøk resulterer i et utfall $e_i$

hendelse: ett eller flere utfall A, B, C, …

utfallsrom: mengden av alle mulige utfall av forsøket S

$A = \{e_i\}$ for visse i

$S = \{e_i\}$ for alle i

notasjon: bruker "{" og "}" for å angi *mengde*

Eksempel: tre kvinner er gravide. De lurer på barnets kjønn: gutt (G) eller jente (J)

S = {GGG, JGG, JJG, JJJ, GJG, GJJ, GGJ, JGJ}

A: minst to jenter A = {JJG, JJJ, GJJ, JGJ}

B: maks to gutter B = {JGG, JJG, JJJ, GJG, GJJ, GGJ, JGJ}

Utfallsrommet kan være diskret eller kontinuerlig.

Eksempel kontinuerlig utfallsrom: levealder, kroppshøyde

Sannsynlighet for en hendelse A. Skrives som P(A)

(fra fransk «probabilité»)

Tre måter å tallfeste en sannsynlighet på

1. Uniform sannsynlighetsmodell: alle utfall har like stor sannsynlighet for å inntreffe.

Sannsynlighet = 100%/antall utfall

Terningkast

Rulett: 37 felt – 18 røde, 18 sorte, 1 grønt.

Hvert felt har sjanse på (100/37)% = 2,7%.

P(rødt) = 18 x 100/37 = 48,6%.

2. Frekvensbasert sannsynlighet for hendelse A: gjennomfør mange forsøk og registrer relativ frekvens for hendelse A.

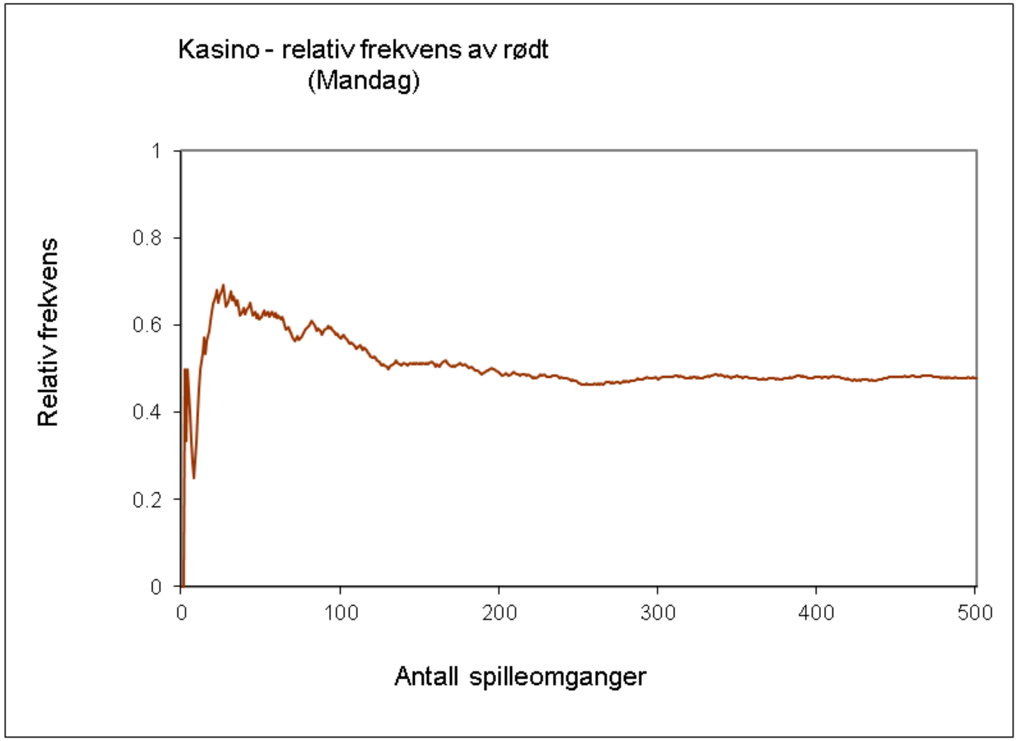
P(A) settes lik denne relative frekvensen.

Sannsynlighet for at en tilfeldig valgt kvinne blant 103 (jfr. tabell 2.3) har tre eller fire barn.

P(tre eller fire barn) = (19+5)/103 = 0,233 eller 23,3%.

P(A) er helt nøyaktig den relative frekvensen for <u>uendelig</u> mange forsøk. Umulig i praksis. Jfr. figur 3.2

Riktig verdi for P(rødt) er lik 0,486, kurven ligger (etter hvert) mellom 0,452 og 0,498



3. Subjektiv sannsynlighet (grad av tro) : brukes når 1 eller 2 er umulige.

Eksempel: P(jeg gifter meg med Anna før 2017).

Tallfeste: Veddemål. Du vinner 100 kr. når hendelsen inntreffer. Hvor mye vil du satse maksimalt (et beløp mellom null og hundre kr.)?

Satset beløp / 100 = anslag på sannsynlighet

Viktig: $0 \le P(A) \le 1$ for alle A og alle typer sannsynligheter.

Merknad frekvensbasert sannsynlighet:

- Unøyaktighet
  - Reduseres ved å øke antall forsøk: $n \to \infty$
- Representativitet
  - Meningsmåling som ikke er landsdekkende
  - Kortstokk med/uten joker
  - P(feil i Opel Omega) når du sjekker Opel Astra

Hukommelsen for en terning/kortstokk/ lottotall:

Du har kastet 60 ganger. Fikk bare 4 ganger en toer. P(toer) i forsøk nr. 61 er fortsatt 1/6.

De store talls lov gjelder framtiden!

# Sannsynlighetsregning

Sammensatte hendelser: flere utfall

Mengdelære

Gitt to hendelser, A og B

Union A U B: A eller B

Snitt $A \cap B$ : A og B

Utfallsrom S

Komplement $\bar{A} = S - A$

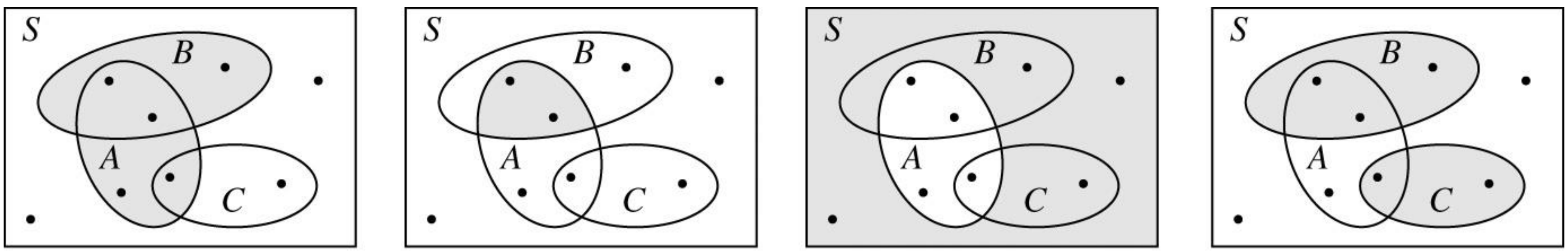
Disjunkt: to hendelser B og C er disjunkte når de ikke har felles utfall

B og C kan ikke inntreffe i samme forsøk

$B \cap C = \emptyset$

NB. Ø er symbol for nullmengden, tom mengde

# Venn-diagrammer (John Venn 1880)




Union $A \cup B$ — Snitt $A \cap B$ — Komplement $\bar{A}$ — $B$ og $C$ er disjunkte

”A eller B”

”A og B”

Eksempel: hva blir P(solskinn eller oppholdsvær)

S = utfallsrom = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

A = solskinn = $\{ e_1, e_2, e_3, e_4\}$

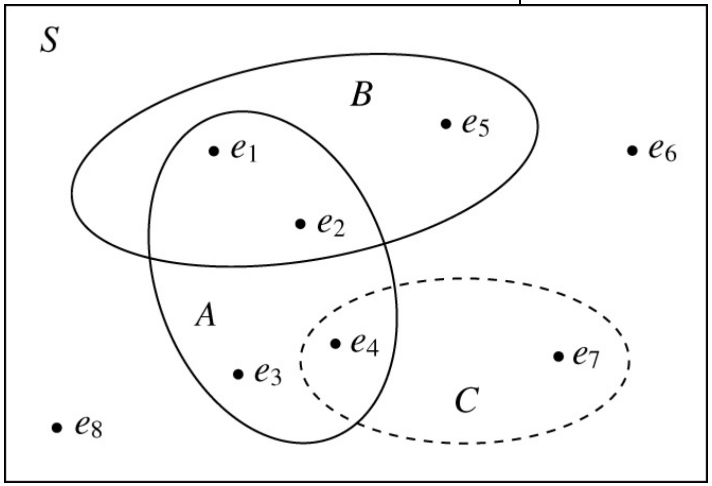
B = oppholdsvær = $\{ e_1, e_2, e_5\}$

C = snøvær = $\{e_4, e_7\}$

A U B = B U A = $\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

slå sammen utfallene

➔ P(AUB)=0,27+0,20+0,20+0+0,03=0,7




A ∩ B = $\{ e_1, e_2\}$

hvilke utfall felles?

B ∩ C = Ø, fordi B og C er disjunkte

$\bar{A} = \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$

| Værtype | Antall ganger i 1961–90 | Relativ frekvens | Estimert sannsynlighet |
|---|---|---|---|
| $e_1$ = Sol | 8 | 0.27 | $P(e_1) = 0.27$ |
| $e_2$ = Sol m/skyer | 6 | 0.20 | $P(e_2) = 0.20$ |
| $e_3$ = Sol m/regn | 6 | 0.20 | $P(e_3) = 0.20$ |
| $e_4$ = Sol m/snø | 0 | 0.00 | $P(e_4) = 0.00$ |
| $e_5$ = Skiftende | 1 | 0.03 | $P(e_5) = 0.03$ |
| $e_6$ = Torden | 2 | 0.07 | $P(e_6) = 0.07$ |
| $e_7$ = Snø | 0 | 0.00 | $P(e_7) = 0.00$ |
| $e_8$ = Regn | 7 | 0.23 | $P(e_8) = 0.23$ |
| Totalt | 30 | 1.00 | $P(S) = 1.00$ |

$A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
$B = \{e_1, e_2, e_5\}$

A U B var lik $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Nå er det lett å se at

$$\overline{A \cup B} = \{e_6, e_7, e_8\} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Også: $A \cap B = \{ e_1, e_2\}$, slik at

$$\overline{A \cap B} = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Gjelder generelt for alle hendelser A og B: De Morgans regler, jfr. oppg. 3.9.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# Tre hendelser

Regneregler

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

To ganger De Morgan

$\overline{A \cup B \cup C} = (\overline{A \cup B}) \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$\overline{A \cap B \cap C} = (\overline{A \cap B}) \cup \overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Reglene kan utvides til flere enn tre hendelser

# Sannsynlighetsregningens aksiomer

Legger fundament for sannsynlighetsregning. Kan ikke bevises, senere satser er en logisk konsekvens. Kolmogorov 1933.

Sannsynlighet P for en hendelse A defineres som et tall som varierer med A, og som sier hvor sannsynlig A er.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Hendelser | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | … | $A_n$ |
| Sannsynligheter | $P(A_1)$ | $P(A_2)$ | $P(A_3)$ | … | $P(A_n)$ |

Tre krav til P(A) (jfr. oppgave 3.10. Formulert litt annerledes på side 90)
NB trykkfeil på side 90: $0 \leq P(A) \leq 1$ , ikke $0 \leq P(A) \leq 0$

Aksiom 1: $P(A) \geq 0$ aldri negativ

Aksiom 2: $P(S) = 1$ S er utfallsrom

Aksiom 3: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots P(A_n)$
for <u>disjunkte</u> hendelser $A_i$

Eksempler terningkast:

Eks 1: kaster en terning

P(to U tre) = P(to) + P(tre) =

= 1/6 + 1/6 = 1/3

Eks 2: kaster to terninger

P(minst <u>en</u> sekser) =

P(sekser på 1. terning U sekser på 2.)

≠ P(sekser på 1.) + P(sekser på 2.),

fordi disse to hendelser ikke er disjunkte: de kan opptre i ett og samme forsøk.

Jfr kaster <u>syv</u> terninger. P(minst <u>en</u> sekser) er <u>ikke</u> lik

P(seks på 1.) + P(seks på 2.) + … + P(seks på 7.) = 7/6 umulig

Konsekvenser av aksiomene:

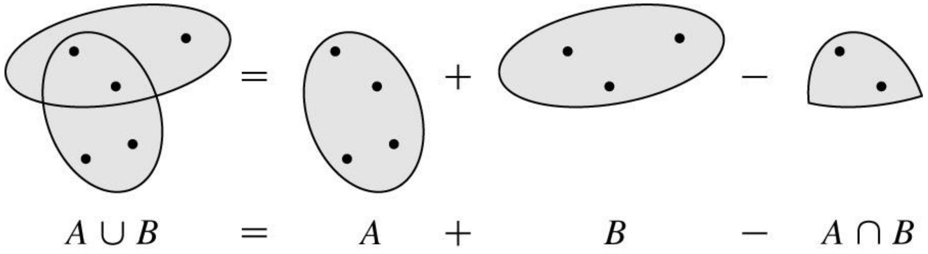
$P(\emptyset) = 0; P(A) \leq 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, fordi $A$ og $\bar{A}$ er disjunkte, og $A \cup \bar{A} = S$.

Addisjonsregelen (3. aksioma) krever at hendelsene er disjunkte. Hvis de ikke er disjunkte, kan vi ikke bruke addisjonsregelen.

En mer generell addisjonsregel:
For alle hendelser A og B gjelder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, uansett om A og B er disjunkte eller ikke

Bevis: anta $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B = \{e_3, e_4, e_5\}$
$P(A \cup B) = P(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}) = P(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) + P(\{e_3, e_4, e_5\}) - P(\{e_3, e_4\})$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$




Eksempel: P(minst 1 sekser når to terninger kastes) =
= P(sekser på 1. terning U sekser på 2. terning) =
= P(sekser på 1.) + P(sekser på 2.) – P(sekser på begge) =
= 1/6 + 1/6 – 1/36 = 11/36

"unngå dobbeltellinger"

Addisjonsregelen kan generaliseres til tre eller flere hendelser, jfr. regel 3.11.

Eksempel: kaster 3 terninger, P(minst 1 sekser)?

A: sekser i 1. kast, B: sekser i 2. kast, C: sekser i 3. kast

$P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$= 3 \times 1/6 - 3 \times 1/36 + 1/216 = 91/216 = 0{,}42.$

Lett å bevise når du skriver hendelse (A U B) som D

<u>Senere</u>: snarvei ved hjelp av <u>produktregelen</u>

$P(\text{minst 1 sekser}) = 1 - P(\text{ingen seksere})$

$= 1 - P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(\bar{C})$

$= 1 - (5/6).(5/6).(5/6) = 1 - 125/216 = 91/216 = 0{,}42,$

fordi hendelsene er uavhengige.

# Betingede sannsynligheter

Brukes for å beregne $P(A \cap B)$ når A og B ikke er disjunkte.

Ekstra informasjon kan påvirke $P(A)$.

Eksempel 1:

Trekker et kort. $P(\text{spar}) = 1/4$.

Hvis jeg nå visste fra før at kortet er et svart kort, blir

$$P(\text{spar, gitt svart kort}) = 1/2$$

Eksempel 2:

Russisk rulett. 6 menn skyter uten å rulle magasinet, 1 kule, 6 kamre. Før de begynner, er sannsynligheten for at 6. mann overlever lik 5/6.

Men hvis 2 allerede har overlevd, blir denne sjansen lik

$$P(\text{6. mann overlever, gitt at to allerede har overlevd}) = 3/4.$$

Slik ekstra informasjon kan ofte beskrives i form av en hendelse, med tilhørende sannsynlighet.

Betinget sannsynlighet skrives som

$P(A|B) = P(A, \text{gitt at } B \text{ har inntruffet})$

Definisjon:

$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, $P(B) > 0$

$P(\text{spar}|\text{svart}) = P(\text{spar og svart})/ P(\text{svart}) = (1/4)/(1/2) = 1/2$

NB Pass på rekkefølgen:

$P(\text{svart}|\text{spar}) = P(\text{spar og svart}) / P(\text{spar}) = (1/4)/(1/4) = 1$!!

Mao $P(A|B)$ er forskjellig fra $P(B|A)$

Regneregler: alle regler som gjelder for sannsynligheter $P(A)$ gjelder også for betingede sannsynligheter $P(A|B)$

Ny regel, som er en direkte konsekvens av definisjon for betinget sannsynlighet:

Multiplikasjonsregel: $P(A \cap B) = P(B).P(A|B) = P(A).P(B|A)$

$A$ = spar, $B$ = svart kort

P(spar og svart kort) = $P(B) \,.\, P(A|B) = (\frac{1}{2}) \,.\, (\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, men også

P(spar og svart kort) = $P(A) \,.\, P(B|A) = (\frac{1}{4}).1 = \frac{1}{4}$

Generelt (regel 3.14):

$P(A \cap B \cap C) = P(C).P(B|C).P(A|B \cap C)$ , alle $P(.) > 0$.

Bevis: skriv $B \cap C$ som D, og bruk multiplikasjonsregelen to ganger

Regel for total sannsynlighet:

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ er disjunkte hendelser. Da gjelder for enhver hendelse A at

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + \ldots + P(B_n).P(A|B_n) \\
&= \textstyle\sum_i P(B_i).P(A|B_i).
\end{aligned}
$$

## Bayes' regel (publisert i 1763. to år etter Bayes' død)

Gitt to hendelser A og B. Da er

$$P(B|A) = \frac{P(B) \, . \, P(A|B)}{P(A)}$$

Bevis: basert på multiplikasjonsregelen

$P(A \cap B) = P(B).P(A|B) = P(A).P(B|A)$ slik at $P(B|A) = \frac{P(B) \, . \, P(A|B)}{P(A)}$

Se eksempel 3.22. Anta:

1. 3% av idrettsutøverne som aldri har dopet seg avlegger en positiv dopingtest (p.g.a. målefeil i en slik test).
2. 84% av utøverne har aldri dopet seg
3. 5% av en gruppe tilfeldig valgte utøvere tester positivt

Bayes: P(utøver er dopingfri| positiv dopingtest)

$$= \frac{0{,}03 \,.\, 0{,}84}{0{,}05} = 0{,}50 = 50\%$$

For en gitt dopingtest ønsker idrettsutøveren størst mulig verdi for P(har dopet seg|positiv test), mens laboratoriet ønsker å maksimere P(positiv test|har dopet seg).

Bayes gir sammenhengen mellom disse to.

Utstrakt bruk av Bayes i medisinske tester. Artig eksempel med løgndetektor i Figur 3.14.

## Uavhengige hendelser

To hendelser A og B er uavhengige $\leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$.

Mao: B påvirker ikke A.

Symmetrisk: A og B er uavhengige $\leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$

Konsekvens: når A og B er uavhengige, gir multiplikasjonsrgelen:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A).P(B)$$

Kan brukes som alternativ definisjon for uavhengighet.

## Forskjell disjunkte hendelser og uavhengighet

| | |
|---|---|
| Disjunkt | $P(A \cap B) = 0$ |
| Uavhengig | $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ |

Eksempel : tabell 3.2. Fordeling av et utvalg av avislesere over avis- og partivalg

| | Stemmer FrP | Stemmer SP | Stemmer noe annet | Sum |
|---|---|---|---|---|
| Leser VG | 0.10 | 0.04 | 0.26 | 0.40 |
| Leser ikke VG | 0.05 | 0.06 | 0.49 | 0.60 |
| Sum | 0.15 | 0.10 | 0.75 | 1.00 |

$P(FrP \cap VG) = 0.10 \neq 0.15 \times 0.40 = 0.06 = P(FrP).P(VG)$

Å stemme FrP og å lese VG er ikke uavhengige hendelser.

De som leser VG stemmer i større grad FrP (0.10/0.40 = 25%) enn de som ikke leser VG (0.05/0.60) = $8\frac{1}{3}$ %.

Tre hendelser A, B og C er uavhengige så snart

$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$ og

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ og

$P(A \cap C) = P(A).P(C)$ og

$P(B \cap C) = P(B).P(C)$

Egenskap

For uavhengige hendelser $A_i$ $(i=1,\ldots,n)$ gjelder

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3).\ \ldots\ .P(A_n)$$

Eksempel (jfr. eks. 3.27)

Tipper 12 fotballkamper. Anta at sjansene er:

80% for å tippe riktig i 3 “sikre” kamper

55% for å tippe riktig i 7 “normale” kamper

33% for å tippe riktig i 2 “vanskelige” kamper

Dermed blir $P(12 \text{ rette}) = (0{,}8)^3.\ (0{,}55)^7\ .\ (0{,}33)^2 = 0{,}00085$ p.g.a. (antatt) uavhengighet

Addisjonsregel for uavhengige hendelser

La $A_1, A_2, \ldots, A_n$ være uavhengige.

Da er $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n)$

Eksempel: 3 terningkast.

P(minst 1 sekser) = 1 – P(ingen sekser) = $1 - (5/6)^3 = 0{,}42$,

fordi kastene er uavhengige.

# Kombinatorikk

Er en del av matematikken som brukes for å holde oversikt over antall mulige utfall og antall gunstige utfall i komplekse situasjoner.

Et sett med telleregler for ulike situasjoner

Eks1: V75, syv løp. Antall hester som deltar er hhv 12, 14, 11, 10, 15, 12, 13.

Antall mulige vinnerrekker (utfall for de 7 vinnerne)

= 12 x 14 x 11 x 10 x 15 x 12 x 13 = 43 243 200

Velger du en tilfeldig hest for hvert løp er vinnersjansen lik 1/43243200

Eks2: En gutt lurer på hvilken bil han skal kjøpe i en leketøybutikk

Det finnes biler i tre størrelser, i fem farger, i fire modeller. Hvor mange valgmuligheter har han?

Han kan velge mellom 3 x 5 x 4 = 60 ulike biler

Produktregelen

Hvis et forsøk har k trinn og hvert trinn har $m_i$ mulige utfall ($i = 1, 2, \ldots, k$) er totalt antall utfall lik

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots m_k$$

Flere regler i kombinatorikk, i tillegg til produktregelen

De avhenger av en del karakteristika til forsøket

Resonnement basert på en urnemodell kan hjelpe i å forstå

En urne har en rekke nummererte/fargede/merkede kuler

Ett trinn i forsøket består i å trekke en kule.

Flere trinn: flere kuler

→ med eller uten tilbakelegging

→ ordnet eller ikke ordnet resultat: rekkefølgen av de trukne kuler er viktig/uvesentlig

Kombiner disse to. Dermed kan vi ha

1. <u>ordnet</u> resultat fra trekning <u>med</u> tilbakelegging
2. <u>ordnet</u> resultat fra trekning <u>uten</u> tilbakelegging
3. <u>ikke-ordnet</u> resultat fra trekning <u>uten</u> tilbakelegging

(4. ikke ordnet resultat fra trekning med tilbakelegging) ikke praktisk relevant

# 1. Ordnet resultat, trekning med tilbakelegging

12 fotballkamper  H B U

Antall mulige rekker er $3^{12} = 531\ 441$

Ordnet, fordi et bestemt utfall i kamp nr. 3 og 4 (for eksempel B og U) er noe helt annet enn samme utfall i hhv kamp nr. 4 og 3.

Med tilbakelegging: etter at resultat for en kamp har blitt «trukket», er det fortsatt tre mulige utfall for neste kamp

Potensregelen

Vi velger k enheter, med tilbakelegging, fra n merkede enheter.

Antall ordnete utfall er lik $n^k$

# 2. Ordnet resultat, uten tilbakelegging

Vi trekker k enheter, uten tilbakelegging, fra en samling med n merkede enheter

Antall mulige ordnete utfall er n.(n-1).(n-2). … .(n-k+1)

Eks: 13 løpere, tre medaljer: gull, sølv, bronse

Hvor mange mulige utfall?

Trekker k = 3 fra n = 13 løpere

Gull: 13 løpere er kandidat

Sølv: 12 løpere er kandidat

Bronse: 11 løpere er kandidat

I alt 13 x 12 x 11 = 1716 ulike utfall

Ordnet, fordi rekkefølgen er åpenbart viktig

Uten tilbakelegging: kun en medalje av hver type

Uttrykket  $n.(n-1).(n-2).(n-2). \dots .(n-k+1)$ heter antall <u>permutasjoner</u> av k fra n

Skrives som $P_{n,k}$

Definisjon: $P_{n,k} = n.(n-1).(n-2).(n-2). \dots .(n-k+1)$

Notasjon <u>fakultet</u>  n! «n-fakultet»

$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3). \dots .3.2.1$  $n \geq 1$, heltall

$3! = 3.2.1 = 6$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

$1! = 1$

Per definisjon: $0! = 1$

Dermed blir $P_{n,k} = n.(n-1).(n-2).(n-3).\ \ldots\ .(n-k+1) =$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1).(n-k).(n-k-1).\ \ldots 3\ .\ 2\ .\ 1}{(n-k).(n-k-1).(n-k-2)\ldots..3\ .2\ .1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

# 3. Ikke-ordnet resultat, uten tilbakelegging

Eks1: Jeg trekker 13 kort fra en kortstokk med 52 kort. Rekkefølgen uvesentlig. Hvor mange forskjellige «hender»?

Først ordnet: kan trekkes på $P_{52,13} = 52!/39!$ forskjellige måter.

Dessuten: en rekke med 13 kort kan ordnes på 13! forskjellige måter.

Når rekkefølgen er uvesentlig blir antall hender derfor lik

$$\frac{52!}{(39!) \times (13!)} = 635\ 013\ 559\ 600 = 635 \text{ mrd.}$$

Eks2: Lotto: trekker 7 kuler fra 34 mulige. Hver kule har et nummer. Etter trekningen settes de i stigende rekkefølge. Derfor ikke-ordnet, uten tilbakelegging

Antall ordnete rekker er $P_{34,7} = 34!/27!$ En rekke med 7 kuler kan ordnes på 7! forskjellige måter.

Dermed er antall Lottorekker lik $34!/(27! \times 7!) = 5\ 379\ 616$

Generelt: antall <u>kombinasjoner</u>

<u>Ikke-ordnet</u> trekning <u>uten</u> tilbakelegging

$C_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$ , skrives også som $\binom{n}{k}$ «n over k»

Antall pokerhender er lik $C_{52,5}$ = 52!/(47! x 5!) = 2 598 960

# Tilfeldig utvalg

Har hvert kort like stor sannsynlighet å havne hos meg? Svaret er åpenbart «ja» dersom det hadde vært med tilbakelegging. Men også uten tilbakelegging er svaret ja!

Eks. Jeg velger tre kort fra en kortstokk med 5 kort. Ett av dem er Hjerter ess (HE).

P(HE trekkes i første trekning) = 1/5

P(HE trekkes i andre trekning) = (4/5) x (1/4) = 1/5

P(HE trekkes i tredje trekning) = (4/5) x (3/4) x 1/3 = 1/5

Slik at P(HE trekkes i det hele tatt) = 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5

Ethvert kort av disse fem har en sjanse på 3/5 for å bli trukket.

Generelt Trekker jeg k enheter fra en populasjon på n, på en helt tilfeldig måte, har hver enhet en sannsynlighet på k/n for å bli trukket.

Tilfeldig utvalg k trekkes fra n enheter uten tilbakelegging. I hver trekning har hver ikke-trukket enhet like stor sannsynlighet for å komme med i utvalget.

Eks. Vi var tre søsken. Det hendte at vi måtte trekke lodd, for eksempel hvem som kunne velge først. Min far puttet tre lapper i en hatt. En lapp var merket.

Min bror, som var yngst, fikk trekke først. Deretter min tur. Til slutt min søster, som var den eldste.

Hun protesterte: urettferdig – guttene hadde større sjanse fordi de kunne velge først. Hadde hun rett?

Bror trekker merket lapp = B, Jeg … = J, Søster ... = S

P(B) = 1/3, P(J) = (2/3) x (1/2) = 1/3,  P(S) = 1 – 2 x (1/3) = 1/3

# Oppsummering tellereglene

Et forsøk som foregår i k etapper, med $m_1$, $m_2$, …, $m_k$ mulige utfall for hver etappe, har totalt antall utfall lik $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$.
Produktregel side 112

Velg k enheter, med tilbakelegging, fra n merkede enheter. Totalt antall mulige ordnete utfall er lik $n^k$.
Potensregel side 113 (spesialtilfelle av produktregelen)

Velg k enheter, uten tilbakelegging, fra n merkede enheter. Totalt antall mulige ordnete utfall er lik $P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Permutasjonsregel side 114

Velg k enheter, uten tilbakelegging, fra n merkede enheter. Totalt antall mulige ikke-ordnete utfall er lik $C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!} = \binom{n}{k}$
Kombinasjonsregel side 117

k trukne enheter kan ordnes på k! ulike måter

# Sannsynligheter basert på kombinatorikk

$$P(\text{hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Antall mulige utfall ofte lett å finne → kombinatorikk

Vanskeligere: antall gunstige utfall

Løvås gir en rekke eksempler

Eks. Gruppe på 30 personer. Hvor stor er sannsynligheten for at to eller flere feirer fødselsdag på samme dag?

P(A) = P(minst to har fødselsdag på samme dag) = 1 – P(Ā)

Ā = ingen har fødselsdag på samme dag

Antall mulige utfall = $365^{30}$ (potensregelen)

Antall gunstige utfall for Ā (alle trukne fødselsdagene er forskjellige) =

$$365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 336 = P_{365,30}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{P_{365,30}}{365^{30}} = \frac{2{,}17\text{ E }76}{7{,}39\text{ E }76} = 0{,}29$$

P(minst to feirer fødselsdag på samme dag) = 0,71