Econ 2130 vår 2015

Seminaroppgaver for uke 15

Eksamen Econ 2130, 2004 høst: Oppgave 3

Eksamen Econ 2130, 2008 **vår – utsatt**: Oppgave 1, 2, 3

pluss

Ekstraoppgave 1 (Om summer)

Det kryr av summer i økonometri, så det er like greit å venne seg til dem først som sist.

Oppvarmingsøvelse

La x_{ij}, $i=1,2,\ldots,4$ $j=1,2,\ldots,5$, være 20 tall gitt i tabellen. Merk at indeksen *i* står for rad nr. *i* i tabellen mens *j* står for kolonne nr. *j*. Dermed har vi, for eksempel (sjekk), $x_{12}=-1$, $x_{21}=2$, og $x_{43}=0$ og $\sum_{j=2}^{4} x_{3j} = x_{32}+x_{33}+x_{34} = -4+1+1=-2$.

x_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$		Sum
$i=1$	1	–1	0	2	3		5
$i=2$	2	1	–3	1	–4		–3
$i=3$	5	–4	1	1	–1		2
$i=4$	–2	0	0	2	2		2
Sum	6	–4	–2	6	0		6

1. Sjekk at $\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = -4$, $\sum_{i=2}^{3} x_{i2} = -3$, $\sum_{i=1}^{4} x_{i5} = 0$

2. Sjekk at $\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 5$, $\sum_{j=1}^{5} x_{4j} = 2$, $\sum_{j=3}^{3} x_{2j} = -3$, $\sum_{j=3}^{5} x_{2j} = -6$

3. Sjekk at $\sum_{i=1}^{4} x_{ii} = x_{11}+x_{22}+\cdots = 5$, $\sum_{i=1}^{4} x_{i4}^{i} = 20$, $\sum_{i=1}^{4} x_{i2}^{i} = -64$

4. Sjekk at $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 6$

   [**Merknad.** Merk at den første dobbeltsummen betyr $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = \sum_{i=1}^{4}\left[\sum_{j=1}^{5} x_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{4}\left[x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{i5}\right]$ som betyr at vi summerer tallene i tabellen radvis. Tilsvarende betyr den andre summen at vi summerer tallene i tabellen kolonnevis, m.a.o $\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = \sum_{j=1}^{5}\left[\sum_{i=1}^{4} x_{ij}\right] = \sum_{j=1}^{5}\left[x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}\right]$
   Det spiller altså ingen rolle om vi summerer tallene i en tabell radvis eller kolonnevis.]

Innledning: Noen regler for summer

(**a**) **Ifølge en viktig regel for summer** betyr $\sum_{i=1}^{n} 2x_i - 3$ det samme som $(2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n) - 3$. Med andre ord, -3 hører ikke med under summetegnet. Om man ønsker at -3 skal være med under summetegnet, må man bruke parentes:

$$\sum_{i=1}^{n}(2x_i - 3) = 2x_1 - 3 + 2x_2 - 3 + \cdots + 2x_n - 3 = (2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n) - 3n\,.$$

Regelen kan beskrives slik: Hvis et *uttrykk(i)* (for eksempel $2x_i - 3$) i summen, $\sum_{i=1}^{n} \mathit{uttrykk}(i)$, selv er en sum bestående av flere ledd (i eksempelet er det to ledd, $2x_i$ og 3), gjelder summetegnet **kun for det første leddet** – altså til første pluss eller minus (mellom ledd) dukker opp i uttrykket. Hvis man ønsker at summetegnet skal omfatte mer enn bare første ledd, må man bruke parentes.

(**b**) Hvis c er en konstant, er $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

$$\left[\ \sum_{i=1}^{n} c = \overbrace{c + c + \cdots + c}^{n} = nc\ \right]$$

(**c**) En felles faktor i en sum kan settes utenfor summen: $\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\left[\ cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n = c\cdot(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\ \right]$$

(**d**) Hvis a, b, c, d er konstanter, gjelder

(1) | $$\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cy_i + dz_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} y_i + d\sum_{i=1}^{n} z_i$$

[En måte å se dette på er å skrive ut summen til venstre, ordne om på leddene og bruke (c). Vi vet jo at endring av rekkefølgen av leddene i en sum ikke endrer summen, som for eksempel, $3 - 5 = -5 + 3$. Skrevet ut får vi:

$$\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cy_i + dz_i) =$$

$$= a + bx_1 + cy_1 + dz_1 + a + bx_2 + cy_2 + dz_2 + \cdots + a + bx_n + cy_n + dz_n =$$

$$= a + \cdots + a + bx_1 + bx_2 + \cdots + bx_n + cy_1 + cy_2 + \cdots + cy_n + dz_1 + dz_2 + \cdots + dz_n =$$

$$\overset{(c)}{=}\ na + b\left[x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right] + c\left[y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right] + d\left[z_1 + z_2 + \cdots + z_n\right]$$

som er lik uttrykket til høyre i (1). Merk også at parentesen i uttrykket til venstre i (1) spiller en viktig rolle. Uten parentes ville ifølge (a) summen bare inkludere første ledd som er a. Vi ville fått $\sum_{i=1}^{n} a + bx_i + cy_i + dz_i = na + bx_i + cy_i + dz_i$]

(**e**) Multiplikasjon av summer: $$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$$

[Bevis: Merk at dobbeltsummen til venstre betyr $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right]$, dvs. at vi først summerer over *i* (i den innerste summen) mens vi holder *j* fast. Deretter summerer vi over *j*. Resultatet får vi så av regel **(c)** som følger:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right] = \sum_{j=1}^{m}\left[a_1 b_j + a_2 b_j + \cdots + a_n b_j\right] =$$

$$\overset{(c)}{=} \sum_{j=1}^{m} b_j\left[a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right] \overset{(c)}{=} \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right]\cdot\sum_{j=1}^{m} b_j$$

siden $\left[a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right]$ er en felles faktor i den nest siste summen og som derfor kan settes utenfor ifølge **(c)**. Det siste uttrykket er ikke noe annet enn $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$ **]**

Oppgave:

1. Vis regel 4.18 i tilfellet $n = 2$. M.a.o., anta at X og Y er stokastisk uavhengige og diskrete. Vis at i så fall gjelder $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$.

   [**Hint:** Bruk **(e).** Ta utgangspunkt i definisjon 4.16 og i formelen rett etter definisjon 4.13. Anta den marginale fordelingen til *X* er gitt ved $P(X = x_i),\quad i = 1, 2, \ldots, n$, og for *Y* ved $P(Y = y_j),\quad j = 1, 2, \ldots, m$. Skriv den simultane punktsannsynlighetsfunksjonen for (X, Y) som $f(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j),\quad i = 1, 2, \ldots, n$ og $j = 1, 2, \ldots, m$. Sett $a_i = x_i P(X = x_i)$ og $b_j = y_j P(Y = y_j)$ i **(e)** ovenfor.]

2. Forklar hvorfor uavhengighet mellom X og Y impliserer at $\text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$, der ρ står for korrelasjonskoeffisienten.

3. Skriv formel (4.18) i regel 4.17 med summetegn.

[**Merknad.** Det er viktig å merke seg at alle reglene og definisjonene (med unntak av definisjon 4.16) 4.12 – 4.18 *gjelder for både kontinuerlige og diskrete stokastiske variable* (jfr. Løvås innledning til avsnitt 4.4). Det kontinuerlige tilfellet krever noen matematiske definisjoner og presiseringer som ikke er pensum i dette kurset, men det er i høy grad pensum å kjenne reglene. De vil bli flittig brukt både i forelesninger, oppgaver og til eksamen…]