Løsningsforslag til eksamen i 2200, mai 06

1. (a) $f'(K) = 2(1-K^2)(-2K) = -4K(1-K^2)$, ved kjerneregelen. (Ellers kan en multiplisere ut og så derivere.)

(b) $dY/dt = F_1'(K,t)(dK/dt) + F_2'(K,t) = F_1'(K,t)(-rK_0e^{-rt}) + F_2'(K,t) = -rK_0e^{-rt}F_1'(K,t) + F_2'(K,t)$.

Når $F(K,t) = K(t+a)^{1/2}$ der $K = K_0e^{-rt}$, får vi

$$dY/dt = -rK_0e^{-rt}(t+a)^{1/2} + K_0e^{-rt}(1/2)(t+a)^{-1/2}$$
$$= K_0e^{-rt}[-r(t+a)^{1/2} + (1/2)(t+a)^{-1/2}]$$

Vi ser at $dY/dt = 0$ når $(1/2)(t+a)^{-1/2} = r(t+a)^{1/2}$, dvs. $r(t+a) = 1/2$, slik at $t = -a + 1/2r$.

(c) Implisitt derivasjon mhp. K gir $2K - L^3 - K3L^2(dL/dK) + 8(dL/dK) = 0$. I punktet $(K,L) = (1,2)$ får vi $2 - 8 - 12(dL/dK) + 8(dL/dK) = 0$, og dermed er $dL/dK = -3/2$.

2. (a) Bedriftens profitten er gitt ved

$$\pi(x,y) = p_Ax + p_By - (K_A + K_B)$$
$$= (900 - 2x - 2y)x + (1400 - 2x - 4y)y - (17\,000 + 100x + x^2 + 6y^2)$$
$$= -3x^2 - 10y^2 - 4xy + 800x + 1\,400y - 17\,000$$

(b) De nødvendige betingelsene for maksimal profitt er gitt ved

$$\text{(i)}\quad \pi_x'(x,y) = -6x - 4y + 800 = 0 \qquad \text{(ii)}\quad \pi_y'(x,y) = -20y - 4x + 1400 = 0$$

Vi finner at løsningene av disse to likningene er $x = 100$ og $y = 50$. Videre er

$$\pi_{xx}''(x,y) = -6\,, \qquad \pi_{xy}''(x,y) = -4\,, \qquad \pi_{yy}''(x,y) = -20$$

Siden $\pi_{xx}''(x,y) = -6 \le 0$, $\pi_{yy}''(x,y) = -20 \le 0$ og $\pi_{xx}''(x,y)\pi_{yy}''(x,y) - (\pi_{xy}''(x,y))^2 = (-6)(-20) - (-4)^2 = 104 \ge 0$, er $(x,y) = (100,50)$ et (globalt) maksimumspunkt. (Vi finner at $\pi(100,50) = 58\,000$, men de er ikke bedt om å regne ut profitten.)

(c) Problemet blir nå

$$\text{maks } -3x^2 - 10y^2 - 4xy + 800x + 1\,400y - 17\,000 \quad \text{når} \quad x + y = 60$$

Lagrangefunksjonen er $\mathcal{L}(x,y) = -3x^2 - 10y^2 - 4xy + 800x + 1\,400y - 17\,000 - \lambda(x+y-60)$, og første-ordensbetingelsene for løsning av problemet er:

$$\text{(i)}\quad \mathcal{L}_x'(x,y) = -6x - 4y + 800 - \lambda = 0 \qquad \text{(ii)}\quad \mathcal{L}_y'(x,y) = -20y - 4x + 1\,400 - \lambda = 0$$

Eliminerer vi λ fra de to likningene, får vi $-6x - 4y + 800 = -20y - 4x + 1\,400$, eller $-x + 8y = 300$. Sammen med bibetingelsen gir det to likninger med to ukjente. Vi

2200exmf06 24.5.2006 835

finner løsningen $x = 20$, $y = 40$. (Vi finner at den tilhørende profitten er 34 600, men de er ikke bedt om å regne ut profitten.)

Annenordensbetingelser for Lagrangeproblemet er ikke pensum, så vi bør ikke trekke noe for dem som nøyer seg med å finne $x = 20$ og $y = 40$. De som etter å ha brukt Lagranges metode (som de blir bedt om) gjør problemet om til et envariabelproblem og viser at vi virkelig har funnet maksimum, bør få et ekstra pluss. ($\hat{\pi}(x) = \pi(x, 60 - x)$ og vi finn her at $\hat{\pi}'(x) = -18x + 360 = 0$ for $x = 20$. Dessuten er $\hat{\pi}''(x) = -18 < 0$, så $x = 20$ maksimerer profitten.)

Sensorveiledning til oppgave 3

(a) De beste kandidatene vil kanskje utlede tilbudskurven til den enkelte bedrift, og vise hvordan man aggrerer for å finne markedets tilbud. En enklere variant vil være å posutlere stigende marginalkostnader og vise/begrunne at profittmaksimering gir $p = c'(x)$. Dette gir en stigende sammenheng mellom x og p siden $c''(x) > 0$. Bedriften vil bare produsere sålenge prisen ligger over minimum av gjennomsnittskostnadene.

(b) La etterspørselkurven for produktet være gitt ved $x^E = E(p)$, og tilbudskurven ved $x^T = T(p)$. Likevektpris og kvantum er bestemt ved $x^* = T(p^*) = E(p^*)$.

(c) Når produsenten må betale en avgift a per enhet blir netto produsentpris lik p-a, og tilbudsfunksjonen er dermed $x^T = T(p-a)$. Ved å invertere får vi $p = T^{-1}(x^T) + a$, dvs tilbudskurven skifter oppover (vertikalt) med avstand *a*.

Likevektsmarkedsprisen (=konsumentpris) er gitt ved $T(p^* - a) = E(p^*)$. Implisitt derrivasjon mhp *a* gir :

$$\frac{dp^*}{da} = \frac{T'(p-a)}{T'(p-a) - E'(p)} = \frac{1}{1 - \frac{E'(p)}{T'(p-a)}} \tag{1}$$

Ved å se på endringen med utgangspunkt i a=0, og bruke at $x^T = x^E = x^*$ i likevekt kan vi skrive om dette uttrykket til

$$\frac{dp^*}{da} = \frac{1}{1 - \frac{El_p x^E}{El_p x^T}} > 0 \qquad (1)'$$

Siden $El_p x^E < 0$ er brøken i nevner positiv, og $0 \le \frac{dp^*}{da} \le 1$. Vi ser at *dp*/da* er mindre jo høyere $\frac{El_p x^E}{El_p x^T}$ er, dvs jo mer prisfølsom etterspørselen er i forhold til tilbudet. Noen ekstremtilfeller: Ved uendelig elastisk etterspørsel er $\frac{dp^*}{da} = 0$, dvs produsentene bærer hele avgiften. Det samme gjelder dersom tilbudet er helt uelastisk. Ved helt uelastisk etterspørsel er $\frac{dp^*}{da} = 1$ dvs forbrukerne betaler hele avgiften. (Dersom tilbud eller etterspørsel er helt uelastisk har avgiften ingen effekt på omsatt kvantum av produktet.) Endel av studentene vil ikke få til implisitt derrivasjon, men vil muligens klare en brukbar figurdrøfting. Dette bør gi poeng, selv om det ikke kan bli full pott.

(d) Vertikal tilbudskurve innebærer at tilbudselastisiteten er uendelig, slik at $\frac{dp^*}{da} = 1$, dvs forbrukerne betaler hele avgiften. Omsatt kvantum går ned når etterspørselkurven er fallende. Om årsaker til horisontal tilbudskurve på lang sikt: Dette er en liten test på om studentene klarer å tilegne seg noe stoff selv. Tilbudskurven på lang sikt har ikke vært gjennomgått på forelesning, bortsett fra at det har vært snakket litt om konstante enhetskostnader på lang sikt. Det står imidlertid endel i pensum (Varian Inermediate). Man bør ikke forvente mer enn noen enkle, fornuftige resonnementer.

Sensorveiledning til oppgave 4

(a) $px = (1-t)wl + S$

Ved å sette inn $l = T - f$ og omorganisere får vi

$$x = -\frac{(1-t)w}{p} f + \frac{w(1-t)T + S}{p}$$

Helningen langs budsjettlinja er $\frac{dx}{df} = \frac{(1-t)w}{p}$. Denne sier hvor mye en enhet fritid koster, målt i enheter av forbruksgodet.

(b) Indifferenskurve: De kombinasjoner av x og f som gjør at individet er på samme nyttenivå. Dvs individet er indifferent mellom kombinasjoner av x og f som ligger langs en indifferenskurve. Helning langs en indifferenskurve er $\frac{dx}{df} = -\frac{U_f(x,f)}{U_x(x,f)}$.

Helningen sier hvor mye individet er villig til å oppgi av forbruksgodet for å få en enhet mer fritid, for gitt nyttenivå. Vi antar at helningen blir slakere langs en indifferenskurve, dvs $\frac{d^2x}{df^2} > 0$.

(c) Maksimering av U(x,f) gitt budsjettbetingelsen (ved hjelp av Lagrange, evt ved innsetting) gir oss de to førsteordensbetingelsene

$$\frac{U_f(x,f)}{U_x(x,f)} = \frac{(1-t)w}{p} \qquad (1)$$

$$x = \frac{(1-t)w}{p} f + \frac{wT+S}{p} \qquad (2)$$

(1) og (2) gir oss individets optimale valg x^*, f^* som funksjoner av de eksogene størrelsene w,t, p og S, dvs $x^* = x(w,t,p,S)$ og $f^* = f(w,t,p,S)$. Hvis man skulle vise effekten av en prisendring analytisk ville det være mer formålstjenlig å skrive $f^* = f\left((1-t)w, p, (1-t)wT + S\right)$ og tilsvarende for x^*, dvs etterspørselen som funksjon av pris på fritid, pris på forbruksgodet og eksogen inntekt. Det forutsettes imidlertid ikke at studentene kan vise substitusjons og inntektseffekter av prisendringer analytisk, dvs ved hjelp av Slutskylikningen, men bare at de kan vise og forklare effektene på en figur.

(d) Substitusjons- og inntektseffekten av en økning i *t* drøftes i en figur. Hvis vi antar at både *x* og *f* er normale goder vil inntektseffekten trekke i retning av mindre fritid, og dermed økt arbeidstilbud når t økes. Substitusjonseffekten trekker derimot i retning av mer fritid (relativt billigere) og dermed lavere arbeidstilbud. Vi kan ikke si noe generellt om hvilken effekt som er sterkest, og dermed om arbeidstilbudet vil øke eller avta som følge av skatteøkningen. For fobruksgodet trekker inntekts- og substitusjonseffekten i samme retning: skatteøkningen gjør godet relativt dyrere og lavere inntekt reduserer etterspørselen etter godet.

(e) Helningen langs en indifferenskurve blir nå $\frac{U_f(x,f)}{U_x(x,f)} = c'(T-f)$. Siden $T - f = l$ kan $c'(T-f)$ tolkes som marginalkostnaden av arbeidsinnsats.

Førsteordensbetingelsen (1) blir dermed $c'(l) = \frac{(1-t)w}{p}$, dvs marginalkostnaden av arbeidsinnsats skal være lik gevinsten av økt arbeidsinnsats. Dette innebærer at tilbudet av arbeid er en funksjon bare av prisen på fritid, $l^* = l\left(\frac{(1-t)w}{p}\right)$, dvs arbeidstilbudet er uavhengig av inntektsnivå. Det er vanlig å anta at både fritid og forbruksgodet er normale, dvs øker med inntekten – men dette gjelder ikke for fritid med denne spesielle nyttefunksjonen. En eksogen inntektsøkning, for gitt pris på fritid, vil bare slå ut i økt forbruk av forbruksgodet. Arbeistilbudskurven er stigende for et individ som har denne nyttefunksjonen. En økning i *w* eller en reduksjon i *t* gir økt arbeidstilbud. Virkningen av en økning i *t* finner vi ved implisit derrivasjon på førsteordensbetingelsen. Dette gir

$$\frac{dl^*}{dt} = -\frac{w}{pc''} < 0$$

(f) Oppgaver av liknende type har ikke vært gjennomgått hverken på forelesninger eller seminarer, så en god del vil trolig ikke få til noe særlig. Det bør være mulig å oppnå A allikevel, dersom de andre punktene er A-nivå.

Vi setter S=0. Budsjettbetingelsen blir nå

$$x = \frac{(1-t)qG(h;A)}{p} = \frac{(1-t)qG(T-f;A)}{p}$$

Helningen langs en budsjettkurve er $\frac{dx}{df} = -\frac{qG_h(T-f;A)}{p} < 0$.

Vi ser at $\frac{d^2x}{df^2} = \frac{(1-t)q}{p} G_{hh}(T-f;A) < 0$.

Maksimering av nytten gitt budsjettkurven gir førsteordensbetingelsene

$$\frac{U_f}{U_x} = \frac{(1-t)q}{p} G_h(T-f;A) \qquad (*)$$

Denne sier at det individet er villig til å avstå av forbruksgodet for å få en enhet mer fritid skal være lik det en enhet mer fritid koster i redusert netto salgsinntekt (h.s.) Sammen med budsjettbetingelsen gir (*) oss to likninger til å bestemme optimal mengde av fritid og forbruksgodet . Dermede er også optimalt antall arbeidstimer bestemt.

En økning i individets talent gjør at prisen på fritid øker samtidig som individets inntekt øker for gitt arbeidsinnsats. Budsjettkurven flyttes utover samtidig som den blir brattere for enhver *f*. Økt *A* har altså en substitusjons- og inntektseffekt – jfr en lønnsøkning i tilfellet med gitt timelønn – og vi kan ikke si noe generellt om effekten av økt talent på valg av fritid og forbruk.