UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 - Matematikk 1/Mikro 1
Exam: ECON1210 – Mathematics 1/Microeconomics 1

Eksamensdag: Tuesday 27. mai 2008
Date of exam: Tuesday May 27. 2008

Sensur kunngjøres: Onsdag 18.06.2008
Grades will be given: Wednesday June 18. 2008

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00
Time for exam: 09:00 p.m. – 03:00 p.m.

Oppgavesettet er på 10 sider
The problem set covers 10 pages

English version on page 6

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Oppgave 1

Finn $f'(x)$ for de følgende funksjonene:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$

Finn F_x' og F_y' for følgende funksjoner

d) $F(x, y) = 3x^2 \ln y$

e) $F(x, y) = \ln(xe^y)$

Deriver følgende funksjoner m.h.p. *x*.

f) $$h(x) = g\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

g) $$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

h) $$h(x) = f(x)x$$

i) $$h(x) = f^{-1}(x)$$

Oppgave 2

Hvilke av disse påstandene er generelt sanne/usanne?

a) $$\frac{x+a-3}{x-3} = \frac{x+a}{x}$$

b) $$e^{2\ln y} = y^2$$

c) $$\ln(x^2 + y^3) = 2\ln x + 3\ln y$$

Oppgave 3

En bedrift står overfor etterspørsel i to markeder gitt ved

$$p = 10 - 2x$$
$$q = 10 - 2y$$

og har produksjonskostnader

$$c(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy\,,$$

der *x* og *y* er de kvanta bedriften selger i de to markedene til de respektive prisene *p* og *q*.

a) Vis at profitten kan skrives som:

$$\pi(x, y) = -3x^2 - 2xy + 10x - 3y^2 + 10y\,.$$

b) Finn stasjonærpunktet for funksjonen $\pi(x, y)$, og

(c) avgjør om det er et minimum eller maksimum.

Oppgave 4

Anta at en forbruker kjøper mengdene x_1 og x_2 av to goder. Prisene på godene er p_1 og p_2.

Forbrukeren har en inntekt lik *m* og har nyttefunksjonen $u(x_1, x_2)$.

a) Hva er den økonomiske tolkningen av $\frac{u'_1(x_1, x_2)}{u'_2(x_1, x_2)}$?

Anta nå at $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.

b) Finn forbrukerens optimale valg av x_1 og x_2 når begge godene kjøpes.

c) Drøft om forbrukeren kan tenkes å ikke ville kjøpe begge godene, og finn etterspørselen i dette tilfellet.

Oppgave 5

Betrakt Slutsky-likninga

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial m}$$

der x_1 og x_2 er etterspørselen etter to goder. x_1 og x_1^h er henholdsvis ordinær etterspørsel (Marshall-etterspørsel) og kompensert etterspørsel (Hicks-etterspørsel). p_1, p_2 og *m* angir henholdsvis priser og inntekt.

Forklar med ord det økonomiske innholdet i $-x_2 \frac{\partial x_1}{\partial m}$.

Oppgave 6

Anta at en forbruker har følgende nyttefunksjonen, der *x* og *y* er mengder av to goder:

$$u = y + 2\sqrt{x}$$

La *p* være prisen på *x*-godet, og sett for enkelhets skyld prisen på *y*-godet til 1. Forbrukeren har en gitt inntekt og kjøper begge godene.

a) Forklar og begrunn hvordan du vil måle konsumentoverskuddet ved forbruk av *x*.

b) Vis at ved optimal tilpasning er $x = \dfrac{1}{p^2}$.

c) Hvordan vil konsumentoverskuddet endres dersom p faller fra 1 til 0,5?

Oppgave 7

Sant eller usant?

For hvert av utsagnene nedenfor skal du angi om det er sant eller usant. Gi kort begrunnelse for svaret ditt i hvert tilfelle.

a) Anta at en forbrukers preferanser kan karakteriseres ved nyttefunksjonen

$u(x_1, x_2) = \ln(x_1 - a) + b \ln x_2$,

mens en annen forbrukers preferanser kan karakteriseres ved nyttefunksjonen

$v(x_1, x_2) = (x_1 - a)x_2^b + c$.

a, b og c er positive konstanter. Vi betrakter godekombinasjoner der $x_1 > a$ og $x_2 > 0$.

De to forbrukerne har samme preferanser.

b) En forbruker har inntekten m og kjøper mengdene x_1 og x_2 av to goder til prisene p_1 og p_2. Forbrukeren tilpasser seg optimalt og har etterspørselsfunksjonen $x_1(p_1, p_2, m)$.

I tilpasningspunktet er

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = -1, \quad \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_1} = 0{,}2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} \frac{m}{x_1} = 1.$$

c) Når en bedrift har fallende gjennomsnittskostnader, vil det å sette grensekostnad lik pris innebære overskudd.

d) Anta at et profittmaksimerende monopol selger i to markeder, kalt marked 1 og marked 2. Monopolet står overfor etterspørselsfunksjonene $y_1 = A_1 p_1^{-1,2}$ og $y_2 = A_2 p_2^{-1,5}$, der A_1 og A_2 er positive konstanter, og y står for kvantum og p for pris.

Monopolet tar høyest pris i marked 1.

e) Et profittmaksimerende monopol kan ta en pris for adgang til godet som selges (inngangspenger, tilknytningsavgift, e.l.) og en pris per enhet som omsettes (variabelledd). Vi antar for enkelhets skyld at grensekostnaden i produksjonen er konstant. Monopolet står overfor to forskjellige typer forbrukere med ulik etterspørselsfunksjon.

Monopolet vil ta en pris per enhet som omsettes, som er lik grensekostnaden.

Oppgave 8

Anta at markedets etterspørsel etter en vare er gitt ved den aggregerte etterspørselsfunksjonen $E(p,\alpha)$, mens tilbudet er gitt ved den aggregerte tilbudsfunksjonen $T(p,\beta)$ der p er prisen på varen og α og β er skiftparametrer. Anta at de partiellderiverte m.h.p. henholdsvis α og β er positive.

a) Hva vil du forutsette om de partiellderiverte m.h.p. *p*? Begrunn kort og verbalt.

Anta at markedet vi ser på er verdensmarkedet for mat. I det siste har følgende forhold fått mye oppmerksomhet: i. Inntekten har økt mye, spesielt i enkelte land i Asia. ii. Korn og andre vekster er tatt i bruk i andre anvendelser enn mat, f.eks. biodiesel. iii. Det har vært tørke i store områder.

b) Forklar hvordan forholdene i., ii. og iii. kan uttrykkes ved hjelp av endringer i skiftparametrene.

c) Velg ett av tilfellene i., ii., iii. og analyser virkningene av skiftet på likevektspris og kvantum.

Oppgave 9

Anta at en bedrift bruker mengdene *L* og *K* av to innsatsfaktorer for å produsere et kvantum $y = f(L,K)$. La *w* være prisen på *L* og *q* være prisen på *K*. Foretaket er prisfast kvantumstilpasser i markedet for *K*, men er ene-etterspørrer (monopsonist) i markedet for *L* og står overfor tilbudsfunksjonen *w(L)* skrevet på prisform. Foretaket ønsker å produsere en gitt mengde *y* til lavest mulig kostnader.

a) Sett opp kostnadsminimeringsproblemet,

b) utled betingelsene for løsning av dette problemet, og

c) tolk betingelsene.

English version

Problem 1

Find $f'(x)$ for the following functions:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

Find $F_x^{'}$ and $F_y^{'}$ for the following functions:

d) $F(x, y) = 3x^2 \ln y$

e) $F(x, y) = \ln(xe^y)$

Find the derivatives of the following functions with respect to *x*.

f) $h(x) = g\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

g) $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

h) $h(x) = f(x)x$

i) $h(x) = f^{-1}(x)$

Problem 2

Which of these statements are generally true/false?

a) $$\frac{x+a-3}{x-3}=\frac{x+a}{x}$$

b) $$e^{2\ln y} = y^2$$

c) $$\ln(x^2+y^3)=2\ln x+3\ln y$$

Problem 3

A firm faces demand in two markets given by

$$p=10-2x$$
$$q=10-2y$$

and has a cost of production

$$c(x,y)=x^2+y^2+2xy\,,$$

where *x* and *y* are the quantities traded in the two markets at the respective prices *p* and *q*.

a) Show that profits can be expressed as

$$\pi(x,y)=-3x^2-2xy+10x-3y^2+10y\,.$$

b) Find the stationary point of the function $\pi(x,y)$, and

(c) decide whether it is a minimum or a maximum.

Problem 4

Suppose that a consumer purchases quantities x_1 and x_2 of two goods. The prices of the goods are p_1 and p_2, respectively. The consumer has income *m* and the utility function $u(x_1,x_2)$.

a) What is the economic interpretation of $\dfrac{u'_1(x_1,x_2)}{u'_2(x_1,x_2)}$?

Now assume that $u(x_1,x_2)=x_1+\ln x_2$.

b) Find the consumer's optimal choice of x_1 and x_2 when both goods are being purchased.

c) Discuss whether the consumer may choose not to buy both goods and find his/her demand in this case.

Problem 5

Consider the Slutsky equation

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial m}$$

where x_1 and x_2 denote demand for two goods. x_1 and x_1^h are, respectively, the ordinary demand (Marshallian demand) and compensated demand (Hicksian demand). p_1, p_2 and m denote prices and income, respectively.

Explain in words the economic content of $-x_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial m}$.

Problem 6

Suppose that a consumer has the following utility function, where *x* and *y* are the quantities of two goods:

$$u = y + 2\sqrt{x}$$

Let p denote the price of the x-good, and, for simplicity, set the price of the y-good equal to one. The consumer has a fixed income and buys both goods.

a) Explain how you would measure the consumer's surplus from consuming *x* and state the reason for your answer.

b) Show that the optimal demand is $x = \dfrac{1}{p^2}$.

c) How does the consumer's surplus change if *p* declines from 1 to 0.5?

Problem 7

True or false?

For each statement below you are asked to state whether it is true or false. State briefly the reasons for your answer in each case.

a) Suppose that a consumer's preferences can be characterised by the utility function

$u(x_1, x_2) = \ln(x_1 - a) + b \ln x_2$,

while the preferences of an other consumer can be characterised by the utility function

$v(x_1, x_2) = (x_1 - a) x_2^b + c$.

a, *b* and *c* are positive constants. We consider consumption bundles where $x_1 > a$ and $x_2 > 0$.

The two consumers have the same preferences.

b) A consumer has income *m* and purchases quantities x_1 and x_2 of two goods at prices p_1 and p_2. The consumer chooses the optimal consumption bundle and has the demand function $x_1(p_1, p_2, m)$.

At the optimum

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = -1, \quad \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_1} = 0{,}2 \text{ and } \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} \frac{m}{x_1} = 1 .$$

c) Where a firm has decreasing average cost, equating marginal cost to price will imply positive profits.

d) Suppose that a profit maximising monopoly sells its output in two markets, called market 1 and market 2. The monopoly faces demand functions $y_1 = A_1 p_1^{-1{,}2}$ and $y_2 = A_2 p_2^{-1{,}5}$, where A_1 and A_2 are positive parameters, and *y* denotes quantity and *p* denotes price

The monopoly charges the higher price in market 1.

e) A profit maximising monopoly can charge a fee for access to the good being sold (admission fee, connection fee, etc.) and charge a price per unit sold (per-unit charge). For simplicity we assume that the marginal cost of production is constant. The monopoly faces two types of consumers with different demand.

The monopoly will charge a price per unit traded which equals the marginal cost.

Problem 8

Suppose that market demand for a commodity is given by the aggregate demand function $E(p,\alpha)$, while supply is given by the aggregate supply function $T(p,\beta)$ where p is the price of the commodity and α and β are shift parameters. Assume that the partial derivatives w.r.t. α and β are positive.

a) What would you assume about the partial derivatives w.r.t. p? State your reasons verbally and briefly.

Assume that the market under survey is the world market for food. Recently, the following circumstances have received much publicity: i. Income has increased sharply, in particular in some Asian countries. ii. Grain and other crops have been diverted to other uses than food, e.g. biodiesel. iii. Drought has occurred in large areas.

b) Explain how the phenomena i., ii., and iii. can be expressed by means of changes in the shift parameters.

c) Select one of the cases i., ii,. iii. and analyse the effects of the shift on the equilibrium price and quantity.

Problem 9

Assume that a firm uses the inputs *L* and *K* to produce an output $y = f(L,K)$. Let *w* denote the price of *L* and let *q* be the price of *K*. The firm is a price taker in the market for *K* but is a single buyer (monopsonist) in the market for *L* and faces the inverse supply function *w(L)*. The firm wants to produce a fixed quantity *y* at the lowest possible cost.

a) Formulate the cost minimisation problem,

b) derive the conditions for the solution of the problem, and

c) interpret the conditions.