UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON2200 - Matematikk 1/Mikro 1
Exam: ECON1210 – Mathematics 1/Microeconomics 1

Eksamensdag: Fredag 22. mai 2009 **Sensur kunngjøres: Fredag 12.06.2009**
Date of exam: friday May 22. 2009 ***Grades will be given: Friday 12 June 2009***

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00
Time for exam: 09:00 p.m. – 03:00 p.m.

Oppgavesettet er på 7 sider
The problem set covers 7 pages ***English version on page 5***

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Resources allowed:
- *No resources allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Oppgave 1 (9%)

Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter

$$f(x) = 3x^2 - 3x^{-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}$$

$$f(x) = G(x, g(x))$$

$$f(x) = g(-x)$$

$$f(x) = \frac{x}{g(x)}$$

$$h(t,s) = (t + 3s)^2 - s$$

Betrakt funksjonen $f(x_1, x_2)$ og la $g(x_1, x_2) = \dfrac{f_1'(x_1, x_2)}{f_2'(x_1, x_2)}$.

Finn et uttrykk for $\dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

Fortsetter på neste side

Oppgave 2 (7%)
Sant eller usant?

For hvert av utsagnene nedenfor skal du angi om det er sant eller usant. Gi begrunnelse for svaret ditt i hvert tilfelle.

a) Dersom $y(x)$ er implisitt gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, så er $y'(x) = -\frac{x}{y}$

b)

$$\frac{x+2y+14}{y+14} = \frac{x+2y}{y}$$

c)

$$e^{\ln(2x)} = x^2$$

d) Dersom en person sparer 100 kroner 1. januar hvert år i 20 år, er beløpet på kontoen rett etter siste innbetaling

$$100\sum_{i=0}^{19}(1+r)^i$$

Oppgave 3 (9%)

En bedrift produserer to varer og har kostnadsfunksjonen

$$c(x, y) = 4x^2 - Axy + y^2,\ A \geq 0$$

Prisen på produktene er 4 for x og 2 for y .

a) Vis at profitten kan uttrykkes ved funksjonen $\pi(x, y) = 4x + 2y - 4x^2 + Axy - y^2$.

b) Finn stasjonærpunktene til denne funksjonen når $A = 2$.

c) For hvilke verdier av A gir stasjonærpunktet et maksimum?

Oppgave 4 (6%)
Maksimer

$$f(x, y) = \ln x + 4\ln y$$

under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 = 5 .$$

Oppgave 5 (15%)
Anta at en forbruker har inntekt og forbruk i to perioder. Forbrukeren har initialt ingen formue (eller gjeld). Vi bruker notasjonen:

m_1 = inntekt i periode 1

m_2 = inntekt (utenom renteinntekt) i periode 2

Fortsetter på neste side

c_1 = forbruk i periode 1
c_2 = forbruk i periode 2
r = rentesats
s = sparing i første periode
m_1, m_2 og r betraktes som eksogene
Den intertemporale budsjettbetingelsen til forbrukeren er

$$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$$

Anta at forbrukeren maksimerer nyttefunksjonen $u(c_1, c_2)$.

a) Tolk betingelsen $\dfrac{\partial u / \partial c_1}{\partial u / \partial c_2} = 1 + r$.

b) Forklar Slutsky-sammenhengen $\dfrac{dc_1}{dr} = \dfrac{\partial h_1}{\partial r} + s\dfrac{\partial c_1}{\partial R}$
der $R = (1+r)m_1 + m_2$ og h_1 betegner kompensert etterspørselsfunksjon. (Det kreves ikke utledning.)

c) Drøft fortegnene til leddene i Slutsky-sammenhengen i b).

Oppgave 6 (15%)

Sant eller usant?

For hvert av utsagnene nedenfor skal du angi om det er sant eller usant. Gi kort begrunnelse for svaret ditt i hvert tilfelle.

a) La produktmengden *x* være gitt ved produktfunksjonen: $x = 10n^{3/4}k^{1/2}$
Denne produktfunksjonen har stigende utbytte med hensyn på skalaen.

b) Gjennomsnittskostnaden til en bedrift er fallende dersom den er lavere enn grensekostnaden.

c) Dersom priselastisiteten til et gode er lik – 1, vil omsetningsverdien falle når prisen øker.

d) La a_1, a_2 og E_1, E_2 angi henholdsvis budsjettandelene og inntektselastisitetene (Engel-elastisitetene) til to goder, 1 og 2. Da er $a_1E_1 + a_2E_2 = 0$.

e) En eksogen inntektsøkning vil ha en positiv virkning på arbeidstilbudet dersom fritid er et normalt (ikke-inferiørt) gode.

Oppgave 7 (20%)

Fortsetter på neste side

La produktmengden til en bedrift være gitt ved produktfunksjonen $x = An^{3/4}k^{1/4}$ der A er en positiv konstant og *n* og *k* er mengder av to innsatsfaktorer. Prisen på *n* er *w* og prisen på *k* er *q*.

a) Finn et uttrykk for den verdien av n som behøves for å produsere en gitt mengde *x* på kort sikt når $k = \bar{k}$.

b) Utled den kortsiktige kostnadsfunksjonen.

c) Utled betingelser for minimering av kostnadene på lang sikt når bedriften skal produsere en gitt mengde *x*.

d) Vis hvordan substitumalen ser ut i dette tilfellet.

e) Utled den langsiktige kostnadsfunksjonen.

Oppgave 8 (8%)
En forbruksvare omsettes i et marked med fullkommen konkurranse. La p betegne pris til produsent og q prisen konsumenten betaler. Anta at det legges en stykkavgift t på varen.

a) Hva er sammenhengen mellom q, p og t?

b) Sett opp en modell og analyser virkningene av avgiften på likevektspris til produsent, likevektspris til forbruker og omsatt kvantum.

Oppgave 9 (11%)
Anta at en forbruker kjøper to goder til prisene p_1 og p_2 og oppnår nytten u.
La $h_1(p_1, p_2, u)$ være den kompenserte etterspørselsfunksjonen (Hicks-etterspørselsfunksjonen) for gode 1. La $c_1(p_1, p_2, m)$ være den ordinære etterspørselsfunksjonen (Marshall-etterspørselsfunksjonen), der *m* er utgiftsbeløp (inntekt). La videre $Y(p_1, p_2, u)$ være utgiftsfunksjonen (levekostnadsfunksjonen) til forbrukeren. Det kan vises at

$$h_1(p_1, p_2, u) = c_1(p_1, p_2, Y(p_1, p_2, u)) \qquad (1)$$

a) Forklar hva hver av funksjonene $h_1(p_1, p_2, u)$, $c_1(p_1, p_2, m)$ og $Y(p_1, p_2, u)$ forteller oss.

b) Forklar i ord hvorfor likning (1) må gjelde.

c) Deriver likning (1) med hensyn på p_1.

Ikke glem den periodiske sluttevalueringen som du finner på emnesiden

ENGLISH VERSION

Problem 1 (9%)

Differentiate the following functions with respect to all arguments

$$f(x) = 3x^2 - 3x^{-2}$$
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$$
$$f(x) = G(x, g(x))$$
$$f(x) = g(-x)$$
$$f(x) = \frac{x}{g(x)}$$
$$h(t,s) = (t+3s)^2 - s$$

Consider the function $f(x_1, x_2)$ and let $g(x_1, x_2) = \frac{f_1^{'}(x_1, x_2)}{f_2^{'}(x_1, x_2)}$.

Find an expression for $\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

Problem 2 (7%)
True or false?

For each statement below, decide whether it is true or false. State the reason for your answer in each case.

a) If $y(x)$ is implicitly defined by $x^2 + y^2 = 1$ then $y'(x) = -\frac{x}{y}$

b)

$$\frac{x+2y+14}{y+14} = \frac{x+2y}{y}$$

c)

$$e^{\ln(2x)} = x^2$$

d) If a person saves NOK 100 on 1 January each year for 20 years, then the amount on the account immediately after the last deposit is $100\sum_{i=0}^{19}(1+r)^i$

Problem 3 (9%)
A firm, producing two commodities, has the cost function

$$c(x,y) = 4x^2 - Axy + y^2,\ A \geq 0$$

The prices of the products are 4 for x and 2 for y.
a) Show that profits can be expressed by the function
$\pi(x,y) = 4x + 2y - 4x^2 + Axy - y^2$
b) Find the stationary points of the function for profits when $A = 2$.

c) For which values of A does the stationary point yield a maximum?

Continues on the next page

Problem 4 (6%)
Maximise

$$f(x, y) = \ln x + 4\ln y$$

subject to the constraint

$$x^2 + y^2 = 5\,.$$

Problem 5 (15%)
Assume that a consumer earns income and consumes in two periods. The consumer has no initial wealth (or debt). We use the notation
m_1 = income in period 1
m_2 = income (excluding interest) in period 2
c_1 = consumption in period 1
c_2 = consumption in period 2
r = rate of interest
s = savings in first period
m_1, m_2 and r are treated as exogenous.
The intertemporal budget constraint of the consumer is

$$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2\,.$$

Assume that the consumer maximises the utility function $u(c_1, c_2)$.

a) Interpret the condition $\dfrac{\partial u/\partial c_1}{\partial u/\partial c_2} = 1 + r$.

b) Explain the Slutsky decomposition $\dfrac{dc_1}{dr} = \dfrac{\partial h_1}{\partial r} + s\dfrac{\partial c_1}{\partial R}$
where $R = (1+r)m_1 + m_2$ and h_1 denotes compensated demand function. (Deriving the equation is not required)

c) Discuss the signs of the respective terms in the Slutsky equation in b).

Problem 6 (15%)

True or false?

For each statement below, decide whether it is true or false. Briefly state the reason for your answer in each case.

a) Denote by x the output given by the production function $x = 10n^{3/4}k^{1/2}$
This production function exhibits increasing returns to scale.

b) The average cost of a firm is diminishing if it is below the marginal cost.

c) Let a_1, a_2 and E_1, E_2 denote respectively the budget shares and income elasticities (Engel elasticities) of two goods, labelled 1 and 2. Then $a_1E_1 + a_2E_2 = 0$.

Continues on the next page

d) Let a_1, a_2 and E_1, E_2 denote, respectively, budget shares and income elasticities (Engel elasticities) for two goods, labelled 1 and 2. Then $a_1E_1 + a_2E_2 = 0$.

e) An exogenous increase in income will have a positive effect on labour supply if leisure is a normal (non-inferior) good.

Problem 7 (20%)
Let the output of a firm be determined by the production function $x = An^{3/4}k^{1/4}$ where *A* is a positive parameter and *n* and *k* are two inputs. The the price per unit of *n* is *w* and the price per unit of *k* is *q*.

a) Find an expression for the value of *n* required to produce a fixed amount *x* in the short term when $k = \bar{k}$.

b) Derive the short term cost function.

c) Derive conditions for minimising cost in the long term when the firm is to produce a fixed amount *x*.

d) Show what the expansion path looks like in this case.

e) Derive the long term cost function.

Problem 8 (8%)
A consumption good is traded in a perfectly competitive market. Let *q* be the price paid by the consumer and denote by *p* the price received by the producer. Suppose that a specific tax *t* is levied on the good.
a) What is the relationship between q, p and t?
b) Set up a model and analyse the effects of a tax on the equilibrium price for the producer, the equilibrium price for the consumer, and the quantity that is traded.

Problem 9 (11%)
Suppose that a consumer purchases two goods at prices p_1 and p_2 and achieves the utility level u.
Let $h_1(p_1, p_2, u)$ be the compensated demand function (Hicksian demand function) for good 1. Let $c_1(p_1, p_2, m)$ be the ordinary demand function (Marshallian demand function), where *m* is total expenditure (income). Moreover, let $Y(p_1, p_2, u)$ be the expenditure function of the consumer. One can show that
$h_1(p_1, p_2, u) = c_1(p_1, p_2, Y(p_1, p_2, u))$ (1)

a) Explain what each of the functions $h_1(p_1, p_2, u)$, $c_1(p_1, p_2, m)$, and $Y(p_1, p_2, u)$ tells us.
b) Explain in words why equation (1) must hold.
c) Differentiate equation (1) with respect to p_1.

Do not forget the periodic final evaluation which you will find on the course page