Kjell Arne Brekke
Vidar Christiansen

Sensorveiledning

ECON 2200, Vår 11

Vi gir poeng for hvert svar. Maksimalt poengtall på hver oppgave svarer til den vekt som er oppgitt i prosent. Maksimal total poengsum blir dermed 100.

Det er ikke noe i veien for å gi halve poeng. Der noen har gitt ekstra gode svar og "overoppfylt" kravet, kan det gjerne gis et skjønnsmessig bonuspoeng eller to. I prinsippet kan en dermed får mer enn 100 totalt, men i praksis vil slike bonuspoeng tjene til eventuelt å vippe kandidatene over poenggrensene for de enkelte karakterene.

Praksis har vært å bruke følgende poenggrenser for de forskjellige karakterene på ECON2200:

A:80 –

B: 65 – 79

C: 50 – 64

D: 40 – 49

E: 30 – 39

Imidlertid kan vi justere grensene i løpet av sensurkoordineringen hvis disse grensene gir en klart urimelig karakterfordeling.

Ellers bør en merke seg at dette er et kurs hvor studentene skal lære å regne. Rent grafisk analyse belønnes derfor tilnærmet ikke, men kan selvfølgelig verdsettes som illustrasjon og hjelp til tolkning av utregninger/algebraiske resultater.

Oppgave 1 (vekt 11%) (1+1+1+1+2+2+4, ett poeng per derivasjon, unntatt g der hver derivasjon gir 2 poeng))

Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle variabler.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x^{-2}$ **gir** $f'(x) = 4x^3 - 4x - 4x^{-3}$

b) $f(x) = e^{3x}$ **gir** $f'(x) = 3e^{3x}$

c) $f(x) = \ln(x + e^x)$ **gir** $\dfrac{1}{x+e^x}(1+e^x) = \dfrac{1+e^x}{x+e^x}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{g(x)}$ **gir** $f'(x)=\dfrac{g(x)-xg'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

e) $F(x,y)=x^2y$ **gir** $F'_x=2xy$ og $F'_y=x^2$

f) Finn de andreordensderiverte til funksjonen $F(x,y)=\ln(f(x)g(y))$.

Denne kan løses på to måter. Direkte:

$$F'_x=\frac{1}{f(x)g(y)}f'(x)g(y)=\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ og } F'_y=\frac{f(x)g'(y)}{f(x)g(y)}=\frac{g'(y)}{g(y)}$$

Eller ved først å se at $F(x,y)=\ln f(x)+\ln g(y)$ **som gir**

$F'_x=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ og $F'_y=\dfrac{g'(y)}{g(y)}$ **I begge tilfelle blir den andrederiverte:**

$$F''_{xx}=\frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} \text{ og } F'_y=\frac{g''(y)g(y)-\left(g'(y)\right)^2}{\left(g(y)\right)^2}$$

g) Finn $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ og $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ når $z=x^2+\ln y$, $x=t-s$ og $y=t+s$

Here er $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}=2x+\dfrac{1}{y}$ og $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}=2x(-1)+\dfrac{1}{y}=-2x+\dfrac{1}{y}$

Oppgave 2 (vekt 10%) **(To poeng for hvert rett svar, ingen krav om begrunnelse)**

Sant eller Galt?

Gjelder følgende påstander generelt (for alle verdier av x og y der funksjonene er veldefinert)?

a) $\ln(x+2y)=\ln x+\ln y^2$ **Galt!**

b) $e^{2\ln x+3}=x^2e^3$ **Riktig da** $2\ln x=\ln x^2$

c) $\sum_{i=0}^{5}(i+1)=15$ **Galt!** $\sum_{i=0}^{5}(i+1)=1+2+3+4+5+6=21$

d) $\dfrac{\ln x^2}{\ln x}=2$ **Riktig da** $2\ln x=\ln x^2$

e) $\dfrac{5x+3y}{x+y}=5-\dfrac{2y}{x+y}$ **Riktig da** $\dfrac{5x+3y}{x+y}=\dfrac{5(x+y)-2y}{x+y}=5-\dfrac{2y}{x+y}$

Oppgave 3 (vekt 15%) (Foreslått poengfordeling: 1-3-4-4-3)

En monopolist selger et produkt i to ulike markeder. Han vil da oppnå en pris $p_1(x_1)=A-ax_1$ om han selger et kvantum x_1 i marked 1 og en pris $p_2(x_2)=B-bx_2$ om han selger et kvantum x_2 i marked 2. Bedriftens kostnader er $c(x_1+x_2)$.

a) Vis at den totale profitten blir $\pi(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 - ax_1^2 - bx_2^2 - c(x_1 + x_2)$.

$$\pi(x_1, x_2) = x_1(A - ax_1) + x_2(B - bx_2) - c(x_1 + x_2)$$
$$= Ax_1 + Bx_2 - ax_1^2 - bx_2^2 - c(x_1 + x_2)$$

b) Finn et sett ligninger som karakteriserer den profittmaksimerende omsetningen

$$\pi'_1 = A - 2ax_1 - c'(x_1 + x_2) = 0$$
$$\pi'_2 = B - 2bx_2 - c'(x_1 + x_2) = 0$$

c) Hvilke betingelser må vi legge på $c(x_1 + x_2)$ for å være sikre på at løsningen i a) faktisk er et profittmaksimum?

Vi krever at

$$\pi''_{11} = -2a - c''(x_1 + x_2) \le 0 \text{ som gir } c'' \ge -2a$$
$$\pi''_{22} = -2b - c''(x_1 + x_2) \le 0 \text{ som gir } c'' \ge -2b$$
$$\pi''_{12} = c''$$
$$\pi_{11}\pi_{22} - \left(\pi_{12}\right)^2 \ge 0 \text{ som gir}$$
$$(-2a - c'')(-2b - c'') - \left(c''\right)^2 = 4ab + 2(a+b)c'' \ge 0$$
$$c'' \ge \frac{-4ab}{2(a+b)} = -2\frac{ab}{a+b}$$

Tilsammen gir det:

$$c'' \ge \max(-2a, -2b, -2\frac{ab}{a+b})$$
$$= -2\min(a, b, \frac{ab}{a+b})$$
$$= -2\frac{ab}{a+b}$$

Vi kan kreve at de ser de tre betingelsene, men jeg krever ikke at de skal klare å se at det kan forenkles videre til en.

Anta nå at bedriften er pristaker i de to markedene, og at prisene i markedene er p_1 og p_2 .

d) Under hvilke betingelser vil bedriften selge et positivt kvantum i begge markedene?

Bare om $p_1 = p_2$. Det er opplagt at det lønner seg å selge i det markedet der prisen er høyest, og et intuitivt argument er godt nok.
Betingelsen for en indre løsning er nå

$$\pi'_1 = p_1 - c'(x_1 + x_2) = 0 \text{ og } \pi'_2 = p_2 - c'(x_1 + x_2) = 0$$

Som gir $p_1 = p_2 = c'(x_1 + x_2)$

For å unngå hjørneløsningen $x_1 = x_2 = 0$ må vi også kreve $p_1 = p_2 > c'(0)$

2 poeng for $p_1 = p_2$ og 2 for $p_1 = p_2 > c'(0)$

e) Hva blir den profittmaksimerende produksjonen til bedriften?
Når bedriften selger i det markedet der prisen er høyest blir $c'(x_1 + x_2) = \max(p_1, p_2)$ **Og om prisen er ulik er kvantum positivt bare i det markedet der prisen er høyest**.

Oppgave 4 (vekt 7%)

Maksimer

$$\ln x + \ln y$$

under bibetingelsen

$$x + y^2 = 12$$

ved hjelp Lagranges metode.

Her er Lagrangefunksjonen

$$L = \ln x + \ln y - \lambda(x + y^2 - 12)$$

Med FOB:
$$L'_x = \frac{1}{x} - \lambda = 0$$
$$L'_y = \frac{1}{y} - 2\lambda y = 0$$

Gir $\lambda = \frac{1}{x} = \frac{1}{2y^2}$ altså $x = 2y^2$

Innsatt i bibetingelsen $2y^2 + y^2 = 12$ altså $y^2 = 4, y = 2, x = 8$

Oppgave 5 (vekt 8%)

Anta at en bedrift er prisfast kvantumstilpasser og har kostnadsfunksjonen $C(x) = K + \frac{a}{2}x^2$ der K og a er positive konstanter. La p betegne produktprisen.

a) $C'(x) = ax$

b) $\bar{C}(x) = C(x)/x = \frac{K}{x} + \frac{a}{2}x$

c) $\bar{C}'(x) = -\frac{K}{x^2} + \frac{a}{2} = 0$

$$\bar{C}''(x) = 2\frac{K}{x^3} > 0$$

$$x^2 = \frac{2K}{a}$$

$$x = \sqrt{\frac{2K}{a}}$$

Da er $\bar{C}(x) = K\sqrt{\frac{a}{2K}} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2K}{a}} = \sqrt{Ka} / \sqrt{2} + \sqrt{Ka} / \sqrt{2} = \sqrt{2Ka}$

d) Profittmaksimering for $x > 0$ gir

$$C'(x) = ax = p$$

$$x = p / a$$

For $x > 0$ må p være over minimum av $\bar{C}$ er lik $\sqrt{2Ka}$.

Tilbudsfunksjonen blir $x = 0$ for $p < \sqrt{2Ka}$ og $x = p / a$ for $p \geq \sqrt{2Ka}$.

Oppgave 6 (vekt 10%)

a) Bedriften vil maksimere profitten mhp *n*.

$$\pi = pf(n,k) - wn - qk$$

$$\frac{d\pi}{dn} = pf_1'(n,k) - w = 0$$

$$\frac{d^2\pi}{dn^2} = pf_{11}'' < 0$$

b) Førsteordensbetingelsen definerer implisitt n(k)

$$pf_1'(n(k),k) - w = 0$$

$$pf_{11}''(n(k),k)n'(k) + pf_{12}''(n(k),k) = 0$$

$$n'(k) = -pf_{12}''(n(k),k) / pf_{11}''(n(k),k)$$

$n'(k)$ er null ved uavhengighet, positiv ved teknisk komplementaritet og negativ ved teknisk alternativitiet.

c)

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = pf_2'(n,k) - q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = -k$$

Oppgave 7 (vekt 18%)

a) $\frac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c}$ forteller hvor mye forbruk forbrukeren er villig til å oppgi for å få en ekstra enhet (time eller lignende) fritid.

b) Blant godekombinasjoner (forbruks-, fritids-kombinasjoner) som forbrukeren synes er like gode, er han/hun villig til å oppgi mindre forbruk for en ekstra time fritid jo mer fritid og mindre forbruk han/hun allerede har.

c)

maksimer $u(c,L)$ gitt $c + wL = R$.

Formuler Lagrange-funksjonen

$$\Lambda = u(c,L) - \lambda(c + wL - R)$$

Deriver mhp henholdsvis c og L og sett lik null. Vi får betingelsene

$\frac{\partial u / \partial L}{\partial u / \partial c} = w$ og $c + wL = R$ til å bestemme optimale c og L: $c(w,R)$ og $L(w,R)$.

Det forbruk forbrukeren er villig til å oppgi for å få en ekstra time fritid, er lik det forbruk han/hun faktisk vil oppgi ved å arbeide en time mindre.

d) Innsetting av $c(w,R)$ og $L(w,R)$ i (den direkte) nyttefunksjonen gir $u(c(w,R), L(w,R)) = V(w,R)$ som angir hvordan forbrukeren rangerer situasjoner med ulik lønnssats og full inntekt når han/hun tipasser seg optimalt.

e) $\frac{dL}{dw}$ er endringen i optimal fritid når w øker med én enhet.

$\frac{\partial h_L}{\partial w}$ er endringen i fritid når w øker med én enhet, og full inntekt samtidig endres slik at forbrukeren forblir på samme indifferenskurve. Dette er en negativ substitusjonseffekt. En substituerer seg bort fra fritid som blir relativt dyrere.

$H\frac{\partial L}{\partial R}$ inntektseffekten. Når lønnsatsen øker med én enhet , vil arbeideren faktisk få økt inntekt lik én ganger H. $H\frac{\partial L}{\partial R}$ sier er oss hvor mye mer fritid arbeideren vil ønske som følge av dette.

$\frac{dL}{dw}$ er bestemt av den samlede virkning av de to motstridende effektene.

Endringen i arbeidstid er lik minus endringen i fritid.

f) Differensier $L(w,R)$: $dL = \frac{dL}{dw}dw + \frac{dL}{dR}B = \frac{dL}{dw}(-t) + \frac{dL}{dR}B$

Innsetting fra Slutsky-likning gir

$$dL = \frac{\partial h_L}{\partial w}(-t) - tH\frac{\partial L}{\partial R} + B\frac{\partial L}{\partial R}$$

$$dL = -t\frac{\partial h_L}{\partial w} + (B - tH)\frac{\partial L}{\partial R}$$

Oppgave 8 (vekt 7%)

a) $\frac{dx}{dp} = -2$ Priselastisiteten $e = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = \frac{-2p}{100-2p}$

p=10 impliserer $e = \frac{-20}{100-20} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0,25$

b) $x = \frac{m}{2p} + 2$ $\quad \frac{dx}{dm} = \frac{1}{2p}$ $\quad \frac{dx}{dm}\frac{m}{x} = \frac{1}{2p}\frac{m}{\left(\frac{m}{2p}+2\right)} = \frac{m}{m+4p} = \frac{200}{240} = \frac{5}{6}$

$\frac{dx}{dp} = -\frac{m}{2p^2}$ $\quad \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -\frac{m}{2p^2}\frac{p}{\left(\frac{m}{2p}+2\right)} = -\frac{m}{m+4p} = -\frac{5}{6}$

c) $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -1,5$

$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0,4$

$\frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{m}{x_1} = a = 1,1$

siden -1,5+0,4+a=0 på grunn av homogeniteten.

Oppgave 9

Likevektsprisen bestemmes ved $E(p,\alpha) = T(p,\beta)$.

En forventer et negativt skift. Vi antar α avtar og $\partial E(p,\alpha)/\partial\alpha > 0$.

Likevektsbetingelsen innebærer $E(p(\alpha),\alpha) = T(p(\alpha),\beta)$

$$E'_p p'(\alpha) + E'_\alpha = T'_p p'(\alpha)$$

$$p'(\alpha) = E'_\alpha / (T'_p - E'_p) > 0$$

$$x'(\alpha) = T'_p E'_\alpha / (T'_p - E'_p)$$

Virkninger av lavere α :

$$-p'(\alpha) = -E'_\alpha / (T'_p - E'_p) < 0$$

$$-x'(\alpha) = -T'_p E'_\alpha / (T'_p - E'_p) < 0$$

Vi går ut fra at lavere x gir sunnere kosthold. Den absolutte endringen i *x* er

$$x'(\alpha) = E'_\alpha / (1 - E'_p / T'_p)$$

Reduksjonen i x blir større jo større skift en får, jo mindre prisfølsom etterspørselen er, og jo mer prisfølsomt tilbudet er. Hvis tilbudet er lite prisfølsomt, og etterspørselen reagerer sterkt på prisøkning , vil ikke tiltaket få særlig stor effekt. Da vil omsatt kvantum gå lite ned fordi produsentene i stor grad opprettholder produksjonen, og fordi prisnedgang stimulerer etterspørselen sterkt og aog motvirker den direkte effekten av skiftet.