UNIVERSITETET I OSLO

ØKONOMISK INSTITUTT

Utsatt eksamen i: ECON2200 – Matematikk 1 / Mikro 1 (MM1)

Eksamensdag: 08.06.2011

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15.00

Oppgavesettet er på 4 sider

Tillatte hjelpemidler:
- Ingen tillatte hjelpemidler

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

BOKMÅL

Oppgave 1 (vekt 11%)
Deriver følgende funksjoner med hensyn på alle variabler.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x^{-2}$

b) $f(x) = x^2 \ln x$

c) $f(x) = e^{3x+5}$

d) $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{H(g(x))}{g(x)}$

f) $F(x, y) = x \ln(x + y)$

g) Finn $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ og $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ når $z = e^{x+y}$, $x = t - s$ og $y = (t + s)^2$

Oppgave 2 (vekt 10%)
Sant eller galt?
Gjelder følgende påstander generelt (for alle verdier av x og y der funksjonene er veldefinerte)?

a) $e^x + e^y = e^{xy}$

b) $\ln x^2 - \ln x = 2$

c) $\sum_{i=3}^{7} i^2 = \sum_{i=1}^{5} (i+2)^2$

d) $\ln(3e^x) = x + \ln 3$

e) $\frac{5x+3y}{1+2y} = \frac{5x+3}{1+2}$

Oppgave 3 (vekt 6%)
La z være gitt som en funksjon av x ved ligningen

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 25,$$

der vi i første omgang betrakter y som en parameter.

a) Bruk implisitt derivasjon til å finne $\frac{dz}{dx}$.

Vi betrakter nå også y som en variabel og ser på z som en funksjon av x og y.

b) Finn $\frac{\partial z}{\partial y}$ også ved hjelp av implisitt derivasjon.

c) Hvorfor skriver vi derivasjonene med symbolet d i oppgave a og med ∂ i oppgave b?

Oppgave 4 (vekt 9%)
En bedrift har to produksjonsanlegg, A og B. Den totale produksjonen y er

$$y = f_A(x_A) + f_B(x_B),$$

der x_A og x_B er innsatsfaktorbruken i de to anleggene. Produktfunksjonene $f_A(x_A)$ og $f_B(x_B)$ er voksende og $f_A(0) = f_B(0) = 0$. Faktorprisen w og produktprisen p er de samme i begge anleggene.

a) Finn et sett ligninger som karakteriserer den profittmaksimerende faktorbruken, under forutsetning om at i profittmaksimum er både x_A og x_B positive.

b) Hvilke betingelser må vi legge på produktfunksjonene $f_A(x_A)$ og $f_B(x_B)$ for å være sikre på at løsningen i a) faktisk er et profittmaksimum?

c) Under hvilke betingelser vil det være profittmaksimerende å velge $x_A = 0$?

Oppgave 5 (vekt 9%)
Anta at en institusjon har et gitt budsjett B til disposisjon for kjøp av to innsatsfaktormengder n og k til de respektive faktorprisene, w og q. Produksjonen i institusjonen er bestemt av produktfunksjonen $x = f(n,k)$. Isokvantene er fallende og krummet mot origo på vanlig måte.
a) Hvordan bør institusjonen innrette seg for å oppnå størst mulig produksjon?
b) Hvordan vil den maksimale produksjonen påvirkes av en økning i w?
c) Hvordan vil bruken av n påvirkes av en økning i B?

Oppgave 6 (vekt 8%)
Anta at et foretak produserer en mengde x av en vare. Produksjonen fordeles på to bedrifter med de respektive kostnadsfunksjonene $c_1(x_1)$ og $c_2(x_2)$, der x_1 og x_2 er produktmengdene i de to bedriftene. Vi forutsetter at $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$.
a) Analyser hvordan foretaket vil fordele produksjonen av en gitt mengde x på bedriftene for å produsere billigst mulig.
b) Analyser hvordan foretaket vil endre produksjonen i de respektive bedriftene ved en økning i x.

Oppgave 7 (vekt 15%)
Anta at en forbruker kjøper mengdene x og y av to varer til prisene p og q. Forbrukeren har nyttefunksjonen $u(x,y) = xy$.
a) Bruk Larganges metode til å finne de kompenserte etterspørselsfunksjonene, $h_x(p,q,u)$ og $h_y(p,q,u)$, og utgiftsfunksjonen til forbrukeren. Vis herunder at $h_x(p,q,u) = p^{-0,5}q^{0,5}u^{0,5}$.
b) Hva blir virkningen på utgiftene (gitt ved utgiftsfunksjonen) når p går opp? Bruk helst omhyllingsteoremet.
c) Hva blir de kompenserte priselastisitetene (Slutsky-elastisitetene) til x?

Oppgave 8 (vekt 8%)
Anta at en forbruker med inntekt m kjøper mengdene c_1 og c_2 av to goder til prisene p_1 og p_2. Forbrukeren har etterspørselsfunksjonene $c_1(p_1, p_2, m)$ og $c_2(p_1, p_2, m)$.

a) Hva er tolkningen av $\alpha_1 = \dfrac{p_1 c_1}{m}$?

b) Bruk elastisiteter til å drøfte hvordan α_1 endres dersom

i. p_1 øker med én prosent,
ii. p_2 øker med én prosent,
iii. m øker med én prosent,
iv. p_1 og m begge øker med én prosent.

Oppgave 9 (vekt 15%)
Anta at et profittmaksimerende monopol produserer en mengde *x* av en vare til kostnad *c(x)* og selger varen til pris *p* der etterspørselsfunksjonen er gitt ved *p(x)*.
a) Utled førsteordensbetingelsen for profittmaksimum, og vis at betingelsen kan skrives som

(1) $$p\left(1-\frac{1}{e}\right)=c'(x)$$

er *e* er tallverdien til priselastisiteten.
b) Hva er mulige verdier for *e* for at det skal finnes et maksimum? Kan du forklare betingelsen intuitivt?
Anta i fortsettesen at betingelsen er oppfylt. Anta nå at følgende spesialtilfelle gjelder: Etterspørsel som funksjon av pris kan skrives $x = Bp^{-e}$, der *B* og *e* er positive konstanter, og $c(x)=\frac{1}{2}kx^2$, der *k* en en positiv konstant.
Anta at det skjer en økning i *k*.
c) Analyser hvordan dette påvirker *p*.
d) Finn spesielt sammenhengen mellom den prosentvise økningen i *p* og den prosentvise økningen i *k*.

Oppgave 10 (vekt 9%)
Betrakt et marked med perfekt konkurranse der etterspørselen etter en vare er gitt ved $E(q)$, der *q* er prisen som forbrukerne står overfor, og tilbudet er gitt ved *T(p)* der *p* er prisen produsentene står overfor. Anta det er lagt en skatt på varen med skattesats *t* slik at $q=(1+t)p$.

a) Analyser virkninger på pris og kvantum i markedslikevekten av en økning i skattesatsen *t*.

Anta at en forbruker har en indirekte nyttefunksjon $V(q,m)$ der m er inntekten til forbrukeren. Anta at det er ønskelig å gi denne forbrukeren en inntektsøkning som gir kompensasjon for skatteøkningen slik at nyttenivået opprettholdes:
(*) $V(q,m)=V_o$ der V_o er konstant.

b) Bruk (*) til å finne den endringen i *m* som gir kompensasjon for en marginal økning i *t*.