Eksamen ECON 2200, Sensorveiledning Våren 2012

Oppgave 1 (8 poeng)

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumenter i e) og f).

(Ett poeng per derivasjon, dvs, 2 poeng i e og f)

a) $f(x) = 3x^2 - x^{-1} + \ln x$ Svar $f(x) = 6x + x^{-2} + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^{-1}+3}$ Svar: $f(x) = \frac{2x\left(x^{-1}+3\right)-\left(x^2-1\right)(-x^{-2})}{\left(x^{-1}+3\right)^2} = \frac{2+6x+1-x^{-2}}{\left(x^{-1}+3\right)^2} = \frac{3+6x-x^{-2}}{\left(x^{-1}+3\right)^2}$

c) $f(x) = e^{g(x)}$ Svar: $f(x) = e^{g(x)} g'(x)$

d) $f(x) = x^2 g(x)$ Svar $f(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x)$

e) $F(x,y) = (x - \frac{1}{y})^2$ Svar: $F'_x(x,y) = 2(x - \frac{1}{y})$ og $F'_y(x,y) = 2(x - \frac{1}{y})y^{-2}$

f) $f(s,t) = (s-t)^2 - (s+t)^{-2}$ Svar:

$f'_s(s,t) = 2(s-t) + 2(s+t)^{-3}$ og $f(s,t) = -2(s-t) + 2(s+t)^{-3}$

Oppgave 2 (5 poeng) Sant eller galt?

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller gale

a) $\sum_{i=1}^{5}(3+i)^2 = \sum_{i=4}^{8} i^2$ **Sant**

b) $\ln(3xy) = \ln(x^3) + \ln y$ **Usant** $\ln(3xy) = \ln(3x) + \ln y = \ln 3 + \ln x + \ln y$

c) $\frac{2x+6}{2} = x + 3$ **Sant**

d) $e^{2\ln x} = 2x$ **Usant** $e^{2\ln x} = x^2$

e) $\ln 2x - \ln 2 = \ln x$ **Sant**

Oppgave 3 (7 poeng).

Betrakt funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Finn stasjonærpunktet til funksjonen

Deriverer og finner nullpunkt $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ gir $x = 0$

b) Tilfredsstiller funksjonen andreordensbetingelsen for et globalt maksimum eller minimum?

Den andrederiverte er $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Her er $f''(0) = -2 < 0$ og løsningen er faktisk et maksimum, men det spørres etter andreordensbetingelse for globalt maksimum, som er at $f''(x) \leq 0$ for alle x. Men vi ser at så snart $(4x^2 - 2) > 0$ blir den andrederiverte posititiv. F.eks: $f''(1) = (4-2)e^{-1} > 0$ Betingelsen er derfor ikke oppfylt.

Oppgave 4 (15 poeng).

En monopolist selger i to markeder. Han selger et kvantum q_1 i marked 1 og et kvantum q_2 i marked 2. Etterspørselen er $D_1(p_1) = 2A - 2p_1$ i marked 1 og $D_2(p_2) = B - p_2$ i marked 2, der p_1, p_2 er prisene i hhv marked 1 og marked 2. Produsentens kostnader er $C(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$

a) Sett opp et uttrykk for produsentens profitt. Sett opp førsteordenbetingelsene for produsentens profittmaksimering, og finn optimalt kvantum og pris i begge markedene. (Anta at A og B er slik at vi har indre løsning.)

Svar: Kandidaten må her først invertere etterspørselen til

$p_1 = A - \frac{1}{2}q_1$ og $p_2 = B - q_2$, som gir profitten

$$\pi = (A - \frac{1}{2}q_1)q_1 + (B - q_2)q_2 - (q_1 + q_2)^2$$

Førsteordensbetingelsen blir da

$(A - q_1) = 2(q_1 + q_2)$ og $(B - 2q_2) = 2(q_1 + q_2)$
det gir $A - q_1 = B - 2q_2$ eller $q_1 = (A - B) + 2q_2$
Innsatt i FOB for q2: $(B - 2q_2) = 2((A - B) + 2q_2 + q_2)$
Samler ledd med q2: $8q_2 = 3B - 2A$ eller $q_2 = \dfrac{3B - 2A}{8}$
Satt inn i uttrykket for q1: $q_1 = (A - B) + 2q_2 = \dfrac{4(A - B)}{4} + \dfrac{3B - 2A}{4} = \dfrac{2A - B}{4}$

b) Sett opp de tilstrekkelige betingelsene for et maksimum og sjekk om de er tilfredsstilt.

$\pi'_1 = A - q_1 - 2(q_1 + q_2)$
$\pi'_2 = B - 2q_1 - 2(q_1 + q_2)$
$\pi''_{11} = -1 - 2 = -3$ så betingelsen $\pi''_{11} < 0$ er oppfylt.
$\pi''_{22} = -2 - 2 = -4$ så betingelsen $\pi''_{22} < 0$ er oppfylt.
$\pi''_{12} = -2$
Altså er $\pi''_{11}\pi''_{22} - \left(\pi''_{12}\right)^2 = (-3)(-4) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8 > 0$
Dermed er også den siste betingelsen $\pi''_{11}\pi''_{22} - \left(\pi''_{12}\right)^2 > 0$ oppfylt

Oppgave 5 (15 poeng).
Sant eller usant? Begrunn svaret

a) Når prisen på en vare synker, vil samlet utlegg til varen øke hvis etterspørselen er uelastisk. **Svar:** Samlet utlegg til en vare, uttrykt som pc, variere med prisen etter $El_p pc = 1 + e$, der $e < 0$, som det normale; er den direkte Cournot-elastisitet. Vi har at dersom $0 > e > -1$ (uelastisk etterspørsel), vil endringen i pris og endring i utlegg gå i samme retning. Når prisen synker, vil samlet utlegg gå ned for en vare som er uelastisk i etterspørselen. Med andre ord: Påstanden er usann.
b) Den direkte substitusjonseffekten av en prisøkning vil kunne være positiv hvis varen er mindreverdig i etterspørselen. **Svar:** Den direkte substitusjonseffekten er alltid negativ når indifferenskurvene er krummet mot origo, eller om nyttefunksjonen er strengt kvasikonkav (kan ikke vente at de svarer dette), eller at MSB er strengt avtakende. Påstanden er usann.
c) En vares budsjettandel vil alltid øke når inntekten øker. **Svar:** En vares budsjettandel $\alpha := \dfrac{pc}{m}$, oppviser følgende sammenheng med inntekten: $El_m \alpha = E - 1$, der E er varens inntekts- eller Engelelastisitet. Budsjettandelen vil øke med inntekten bare

$E > 1$; dvs. varen er et «luksusgode». Siden budsjettandelen synker med inntekten om $E < 1$, er påstanden usann.

d) En vares budsjettandel vil øke når prisen på varen øker, bare hvis etterspørselen er uelastisk. **Svar:** Vi har nå at $El_p \alpha = 1 + e$ som er positiv om $e > -1$; uelastisk etterspørsel. Påstanden er sann.

e) I to-godetilfellet vil vi kunne ha at en økning i prisen på en vare vil lede til økt etterspørsel etter begge varer. **Svar: Dette er den mest krevende i denne oppgaven.** Fra budsjettbetingelsen $\sum_i p_i c_i(p_1, p_2, m) = m$, følger: $c_j + \sum_i p_i \dfrac{\partial c_i}{\partial p_j} = 0$ for $j = 1,2$. Under forutsetning av indre løsning på nyttemaksimeringsproblemet, finner vi dermed $\sum_i p_i \dfrac{\partial c_i}{\partial p_j} = -c_j < 0$, hvilket innebærer at minst en av de deriverte i summen på venstre side må være negativ. Påstanden er dermed usann.

Oppgave 6 (20 poeng).

En konsument/arbeidstaker har preferanser over konsum –

angitt med symbolet c, og fritid (angitt med symbolet F), gitt ved nyttefunksjonen $U(c,F) = c + \theta\sqrt{F}$, der θ er en positiv konstant. Denne nyttefunksjonen ønskes maksimert, hensyn tatt til et tidsbudsjett $(T = F + N)$ og et "økonomisk" budsjett $c = wN + S$. T er tilgjengelig tid i den perioden vi betrakter, N er arbeidstid, og hver tidsenhet betales med en lønn på w kroner. S er en stønad, målt i kroner. Så vel stønad som lønn tas som gitt av konsumenten. (Prisen på konsum er satt lik én.)

1. Formuler konsumentens nyttemaksimering ved hjelp av Lagranges metode, når du setter inn fra tidsbudsjettet i det økonomiske budsjettet. Anta indre løsning. **Svar:** $L = c + \theta\sqrt{F} - \lambda\left[c + wF - R\right]$ der $R := wT + S$. (Her skal det være rett frem: Fra $c = wN + S = w(T - F) + S \Leftrightarrow c + wF = wT + S := R$.
2. Utled den nyttemaksimerende kombinasjonen av goder og fritid. **Svar:** Den indre nyttemaksimerende tilpasningen er kjennetegnet ved at vi leter opp stasjonærpunktene til Lagrangfunksjonen: En optimal (indre) løsning må oppfylle: $L_c = 1 - \lambda = 0$ og $L_F = \dfrac{\theta}{2} F^{-\frac{1}{2}} - \lambda w = 0$. Fra den første finner vi at $\lambda = 1$, som inn i den andre gir: $\dfrac{\theta}{2\sqrt{F}} = w \Rightarrow \sqrt{F} = \dfrac{\theta}{2w} \Rightarrow F = \left(\dfrac{\theta}{2w}\right)^2$, med

$N = T - F = T - \left(\dfrac{\theta}{2w}\right)^2$ og $c = wN + S = wT - \dfrac{\theta^2}{4w} + S$. Vi har at

etterspørselsfunksjonen for fritid er $F(w) = \left(\dfrac{\theta}{2w}\right)^2$, mens tilbudsfunksjonen for

arbeid er $N(w) = T - \left(\dfrac{\theta}{2w}\right)^2$.

3. Hva er betingelsen for at konsumenten ønsker å arbeide? Angi med andre ord en betingelse for at problemet ikke skal ha hjørneløsning. **Svar:** Det spørres med andre ord om når $N(w) > 0 \Leftrightarrow T - \left(\dfrac{\theta}{2w}\right)^2 > 0$ eller $4w^2T > \theta^2$. Hvis denne betingeslen ikke holder, vil $F = T$, og vi har hjørneløsning.
4. Anta indre løsning. Hvordan påvirkes arbeidstilbudet av
   - Økt lønn. **Svar:** Økt lønn fører til økt tilbud av arbeid, siden vi har
     $$N'(w) = -2\left(\frac{\theta}{2w}\right)\frac{0-2\theta}{4w^2} = \frac{4\theta^2}{8w^3} = \frac{\theta^2}{2w^3} > 0$$
   - Høyere stønad. **Svar:** $N(w)$ avhenger ikke av S; slik at $\dfrac{\partial N}{\partial S} = 0$
5. Hvordan påvirkes konsumet c av de samme endringene som i punkt d? Kommenter dine funn i lys av generell økonomisk teori. **Svar:** Fra punkt 2 har vi at $c(w,S) = wT + S - \dfrac{\theta^2}{4w}$. Fra denne finner vi: $\dfrac{\partial c}{\partial S} = 1$ og $\dfrac{\partial c}{\partial w} = T - \dfrac{0-4\theta^2}{16w^2} = T + \dfrac{\theta^2}{4w^2} > 0$. At fritidsetterspørselen kun avhenger av (real)-lønn, og uavhengig av inntekt, er en følge av den spesielle nyttefunksjonen som er valgt. Det normale er at hver vare avhenger av realinntekt og reallønn. Også fortegnene på de partielel deriverte av c-funksjonen følger av den spesielle nyttefunksjonen.

Oppgave 7 (30 poeng).

En bedrift produserer en vare i mengde *x* ved bruk av energi (angitt ved E_1) som eneste variable produksjonsfaktor på kort sikt, sammen med en gitt mengde realkapital. På kort sikt gjelder produktfunksjonen $x = f(E_1;\bar{k})$, der $\bar{k}$ er den gitte mengden realkapital. Anta at denne funksjonen er tilstrekkelig deriverbar med $\frac{\partial f}{\partial E_1} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2} < 0$ og anta for seinere bruk at $\frac{\partial^2 f}{\partial k \partial E_1} > 0$.

a) Forklar hva disse antakelsene om produktfunksjonen betyr. **Svar:** Grenseproduktiviteten for energi er positiv og avtakende, samtidig som grenseproduktiviten skifter oppover (positivt skift) av mer realkapital; faktorene er teknisk komplementære.

Anta at denne bedriften ønsker å maksimere overskuddet når den står overfor gitte priser som prisfast kvantumstilpasser, med P som produktpris og q som pris på energi.

b) Hva kjennetegner en profittmaksimerende tilpasning? Forklar hvorfor vi kan skrive bedriftens kortsiktige etterspørselsfunksjon for energi som $E_1(q, P, \bar{k})$? **Svar:** Profitten til bedriften kan skrives som: $\pi(E_1; \bar{k}) = Pf(E_1, \bar{k}) - qE_1$. Under forutsetning av indre løsning, vil den profittmaksimerende bruk av energi være bestemt av $\frac{\partial \pi}{\partial E_1} = P\frac{\partial f}{\partial E_1} - q = 0$. Hvis det nå finnes en slik energibruk, må dette være et maksimum all den tid vi har $\frac{\partial^2 \pi}{\partial E_1^2} = P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2} < 0$. Gitt at disse betingelsene er oppfylt, vil førsteordensbetingelsen; verdi av grenseproduktivitet lik faktorpris, gi som løsning $E_1(q, P; \bar{k})$. Dette er bedriftens etterspørselsfunksjon for energi, skrevet som en funksjon av de for bedriftens eksogene variable.

c) Hvordan varierer bedriftens kortsiktige etterspørsel etter energi med hhv. q, P og $\bar{k}$? **Svar:** Fra førsteordensbetingelsen får vi rett frem: Virkning på bedriftens etterspørsel (lik bruk) av energi når eneegiprisen selv øker, finner vi fra:

$P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial q} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial q} = \frac{1}{P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2}} < 0$. Høyere faktorpris leder til mindre bruk av energi.

Høyere produktpris: $\frac{\partial f}{\partial E_1} + P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2}\frac{\partial E_1}{\partial P} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial P} = \frac{\frac{\partial f}{\partial E_1}}{P(-\frac{\partial^2 f)}{\partial E_1^2}} > 0$. Høyere produktpris leder til økt bruk av energi.

Tilslutt: Hvordan påvirkes energibruken av at bedriften er utstyrt med mer kapital?

Vi finner nå: $P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{k}} + P\frac{\partial^2 f}{\partial E_1 \partial \overline{k}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial \overline{k}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial E_1 \partial \overline{k}}}{(-\frac{\partial^2 f}{\partial E_1^2})} > 0$. Mer realkpaital leder til økt bruk av energi med våre antakelser.

En typisk konsument har preferanser over to goder; vanlig konsum (c) og energi (E_2). Konsumenten maksimerer denne nyttefunksjonen med budsjettbetingelsen $pc + qE_2 = m$, der p er pris per enhet av c, m er inntekt, og q er pris på energi. Priser og inntekt er eksogene størrelser, og konsumenten opptrer som prisfast kvantumstilpasser i alle markeder.

d) Forklar hvorfor konsumentens etterspørsel etter energi kan skrives som $E_2(q,p,m)$. **Svar:** Med nyttefunksjon $U(c,E_2)$, som antas å ha standard egenskaper, og med en slik nyttefunksjon, vil vanlig nyttemaksimering kreve at $MSB = \frac{U_c}{U_E} = \frac{p}{q}$ og at budsjettbetingeslen er oppfylt. Dette gir oss i alt to betingelser til å uttrykke de endogene variable (c,E_2) som funksjoner av de for konsumenten eksogene variable; (q,p,m). Denne løsningen uttrykkes generelt ved etterspørselsfunksjonene $E_2(q,p,m)$ og $c(q,p,m)$.

e) Anta at energi er et fullverdig (normalt) gode. Hva er da virkningen på etterspørselen etter energi hos konsumenten når q øker, og når m øker? **Svar:** Når q øker, samtidig som energi er fullverdig i etterspørselen, vet vi at etterspørselseffekten kan uttrykkes ved Cournotelastisiteten; $e_{Eq} = S_{Eq} - \alpha_E \Lambda_E$, der S_{Eq} er den direkte Slutsky-elastisiteten (negativ), som angir den direkte substitusjonseffekten (og som er negativ med strengt avtakende MSB), mens det andre leddet, som med forutsetningen om fullverdighet, og dermed positiv inntektselastitiet Λ_E, vil gi en inntektseffekt som også går i negativ retning. Dermed vet vi at etterspørselen etter energi helt sikkert vil gå ned når q øker. Virkningen av en høyere inntekt, kan angis ved inntekts- eller Engelelastisiteten Λ_E. Siden denne per forutsaetning er positiv, vil etterspørselen etter energi gå opp når inntekten øker.

La det nå være *N* slike bedrifter som beskrevet i første del av oppgaven, og *M* slike konsumenter som beskrevet over, i denne økonomien.

f) Forklar hvorfor samlet etterspørsel etter energi nå kan skrives som $N \cdot E_1(q,P,\overline{k}) + M \cdot E_2(q,p,m)$. **Svar:** Samlet etterspørsel etter energi fra de N like bedriftene, følger ved horisontal summering. For gitte verdier på $(P,\overline{k})$, kan vi ved horisontal summering, finne den totale etterspørselen etter energi fra bedriftene for en hvilken som helst pris på energi. Denne er gitt ved det første leddet $N \cdot E_1(q, P, \bar{k})$ som, med våre antakelser, er fallende i q. Tilsvarende er det andre leddet den samlede etterspørsel etter energi fra konsumentene. For fastholdte verdier på (p, m), vil vi ved å variere q få husholdningsetterspørselskurven for energi, gitt som $M \cdot E_2(q, p, m)$ som vi også har vist må være fallende i q. Sammenhengen mellom samlet etterspørsel og prisen på energi er en bevegelse langs kurven, mens endringer i de øvrige variable gir et skift.

g) Anta at samlet tilbud av energi er gitt og lik $\bar{Y}$. Gi en begrunnelse for at den prisen som sikrer likevekt i energimarkedet kan uttrykkes som $q(\bar{Y}, p, P, \bar{k}, m, N, M)$. **Svar:** Likevekt krever at vi har $N \cdot E_1(q, P, \bar{k}) + M \cdot E_2(q, p, m) \le \bar{Y}$. (Få vil ta opp muligheten av tilbudsoverskudd, som det kan være naturlig å utelukke.) Med likhet, vil det finnes en pris, q^*, slik at $N \cdot E_1(q^*, P, \bar{k}) + M \cdot E_2(q^*, p, m) = \bar{Y}$. Denne situasjonen kan enkelt illustreres med en fallende etterspørselssammenheng og et gitt tilbud. Siden den prisen som sikrer likevekt også avhenger av de variablene som påvirker beliggenheten av etterspørselskurven, vil likevektsprisen, som er endogen i dette problemet, bli en funksjon av de øvrige eksogene variable. Det forklarer sammenhengen $q^* = q(\bar{Y}, p, P, \bar{k}, m, N, M)$.

h) Hvordan påvirkes likevekten av at tilbudet av energi øker? Hva blir virkningen om antall konsumenter øker? **Svar:** Når tilbudet øker, gjetter vi at likevektsprisen går ned. Dette ser vi ved å derivere implisitt med hensyn på $\bar{Y}$, gjennom likevektsbetingelsen, når vi samtidig bruker den sammenhengen vi generelt har for likevektsprisen. Vi finner da:

$$N \frac{\partial E_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \bar{Y}} + M \frac{\partial E_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \bar{Y}} = 1 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{N \underbrace{\frac{\partial E_1}{\partial q}}_{-} + M \underbrace{\frac{\partial E_2}{\partial q}}_{-}} < 0,$$ der vi har benyttet hva

vi vet fra tidligere. Økt tilbud vil føre til lavere pris. For å få brukerene til å kjøpe mer, må prisen ned. Når antall konsumenter M øker, og M oppfattes som en kontinuerlig variabel, vil det finne sted et skifte i etterspørselsfunksjonen. Dette gjetter vi på leder til en høyere q^*. Fra likevektssammenhengen har vi da:

$$N \frac{\partial E_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial M} + E_2(q^*, p, m) + M \frac{\partial E_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial M} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial M} = \frac{-E_2(q^*, p, m)}{N \underbrace{\frac{\partial E_1}{\partial q}}_{-} + M \underbrace{\frac{\partial E_2}{\partial q}}_{-}} > 0.$$ Flere

kjøpere konkurrerer om en gitt mengde; dermed må prisen opp i likevekt. (Her skal kandidatene testes i om de har forstått hva en likevektssammenheng innebærer, og implisitt derivasjon.)

i) Det innføres nå en stykkavgift på energi. Hva blir virkningen av en slik avgift på den prisen konsumentene betaler? **Svar:** Siden det ikke skjer noe med etterspørselens beliggenhet, vil den prisen kjøperne betaler ikke, påvirkes av avgiften. Hele avgiften betales av tilbyderene. (Kan lett vises i en figur.) Med andre ord: Konsumentprisen er upåvirket siden tilbudet er gitt.

j) Anta tilslutt at tilbudet av energi selv varierer positivt med prisen q, dvs. at vi har at markedstilbudsfunksjonen for energi kan skrives som $Y(q)$. Samtidig avvikles avgiften. Hva blir virkningen på likevektsprisen nå om antall konsumenter øker? **Svar:** Likevektssammenhengen vil nå kunne uttrykkes som $N \cdot E_1(q,P,\overline{k}) + M \cdot E_2(q,p,m) = Y(q)$, med en pris som sikrer at tilbud er lik etterspørsel skrevet som $q^0 = q(p,P,\overline{k},m,N,M)$. Med stigende tilbudskurve kan situasjonen enkelt illustreres. Når antall konsumenter nå øker, vil vi kunne finne virkningen på q^0 fra: $N\frac{\partial E_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial M} + E_2(q^0,p,m) + M\frac{\partial E_2}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial M} = Y'(q)\frac{\partial q}{\partial M}$, fra hvilken vi finner $\frac{\partial q}{\partial M} = \frac{-E_2(q^0,p,m)}{M\frac{\partial E_1}{\partial q} + M\frac{\partial E_2}{\partial q} - Y'(q)} > 0$, siden både teller og nevner er negativ. Vi ser at prisvirkningen avhenger av brattheten på etterspørselssammenhengen og tilbudssammenhengen. Dette vil kanskje bli påpekt av noen av de flinkeste.