UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Utsatt eksamen i: ECON2200 Matematikk 1 / Mikro 1

Eksamensdag: 18.06.2013

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 15:00

Oppgavesettet er på 5 sider

Tillatte hjelpemiddel:
- Ingen tillatte hjelpemiddel

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen, A-F, der A er beste karakter og E er dårlegaste ståkarakter. F er ikkje bestått.

<u>Oppgave 1</u> *(8 poeng, ett poeng for hver derivasjon, altså 2 på e og f)*

Deriver følgende funksjoner. Deriver med hensyn på begge argumenter i e) og f).

a) $f(x) = x^3 - x^{-2} + e^x$

b) $f(x) = \dfrac{x^{-1} + 3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \ln(g(x))$

d) $f(x) = x \ln x$

e) $F(x, y) = e^{x-y}$

f) $f(t, s) = (s + 2t)^{-1} - (s - 2t)^2$

<u>Oppgave 2</u> *(5 poeng, ett for hver deloppgave)* **- Sant eller galt?**

For hver av disse påstandene, avgjør om de er sanne eller gale:

a) $\sum_{i=0}^{4} \ln(4i - 2) = \sum_{i=1}^{5} \ln(4i + 2)$

b) $\ln(x + 3y) = (\ln x)(\ln 3y)$

c) $\dfrac{2y + 5x}{3y - 4x} = \dfrac{2 + 5x}{3 - 4x}$

d) $e^{1+x} = e \cdot e^x$

e) $\ln(yx) - \ln y = \ln x$

<u>Oppgave 3</u> *(12 poeng, 3 for hver deloppgave)*

Betrakt funksjonen $f(x) = x^3 - 9x$ definert for $x \geq 0$.

a) Finn stasjonærpunktet til funksjonen.

b) Avgjør om stasjonærpunktet er et minimum, maksimum eller ingen av delene.

Anta nå at funksjonen er definert for alle x.

c) Har funksjonen nå flere stasjonærpunkt? Angi i så fall disse stasjonærpunktene.

d) Sett opp andreordensbetingelsene for globale maksimum eller minimum, og avgjør om noen av stasjonærpunktene tilfredsstiller dem.

Oppgave 4 *(max 9 poeng, 3 for hver deloppgave)*

En bedrift produserer to ulike varer i kvantum q_1 for vare 1 og q_2 for vare 2. p_1, p_2 er prisene for henholdsvis vare 1 og vare 2. Kostnadene til produsenten er
$C(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$

a) Sett opp et uttrykk for bedriftens profitt.

b) Sett opp førsteordensbetingelsene for profittmaksimum og finn optimalt kvantum for begge varene.

c) Sett opp de tilstrekkelige betingelsene for maksimum og sjekk om de er tilfredsstilt.

Oppgave 5 *(20 poeng)*
En bedrift produserer en vare *y* med en innsatsfaktor *x*. Produktfunksjonen er $y = f(x)$ og prisen på produktet er *p* mens prisen på innsatsfaktoren er *q*. Bedriftens optimale profitt er da

$$\pi(p,q) = \max_x \ pf(x) - qx = pf(x^*(p,q)) - qx^*(p,q)$$

der $x^*(p,q)$ er optimal faktorbruk gitt prisene på produkt og innsatsfaktor.

a) Finn et uttrykk for $\frac{\partial \pi}{\partial q}(p,q)$ *(4 poeng)*

b) Still opp førsteordenbetingelsen for bedriftens profittmaksimering. *(3 poeng)*

c) Hva må vi anta om produktfunksjonen for å sikre at andreordensbetingelsene for et maksimum er tilfredsstilt? *(3 poeng)*

d) Hva må vi anta om $f'(0)$ og om prisene for å sikre at $x^*(p,q) > 0$? *(3 poeng)*

e) Finn et uttrykk for hvordan optimalt bruk av innsatsfaktorer endres med en økning i prisen på innsatsfaktoren. Altså finn et uttrykk for $\frac{\partial x^*}{\partial q}(p,q)$. *(4 poeng)*

f) Finn et uttrykk for hvordan optimal produksjon endres med en økning i prisen på innsatsfaktorer. Altså, finne et uttrykk for $\frac{\partial y^*}{\partial q}(p,q)$. *(3 poeng)*

Oppgave 6 *(max 18 poeng – max 3 poeng på hvert underspørsmål)*

En konsument har en «kake» av en gitt størrelse S som forbrukes over tid; eller mer presist i to perioder. La kakeforbruket i 1.periode være c_1 og forbruket i 2.periode være c_2. Du kan anta at hele kaken er ferdigspist når 2.periode tar slutt.
La konsumenten ha løpende nytte av forbruket i periode $t = 1,2$, gitt ved nyttefunksjonen $u(c_t)$. Du skal anta at konsumenten vil velge en konsumprofil c_1, c_2 slik at $u(c_1) + \beta u(c_2)$ maksimeres gitt at hele kaken spises opp over de to periodene. Konstanten β er en vekt som er positiv og mindre enn én.

1. Anta at $u-$funksjonen er strengt voksende og strengt konkav. Forklar matematisk og i ord hva disse antakelsene betyr.

2. Finn den optimale konsumprofilen ved å løse problemet som et Lagrange-problem. Forklar i ord hva optimumsbetingelsen uttrykker.

3. Når vil konsumenten ønske å spise hele kaken i 1.periode?

4. Anta at $u(c) = \ln c$ og vis hvordan løsningen fra foregående punkt nå blir.

5. På bakgrunn av resultatene fra foregående punkt skal du vise hvordan konsumfordelingen påvirkes av
   - S øker
   - β øker

6. Illustrer (og begrunn) virkningene av en økning i β fra foregående punkt i et badekardiagram.

Oppgave 7 *(max 14 poeng)*

En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = a + bx^2$ ved fremstilling av x enheter av en vare.

1. Utled gjennomsnitts- og grensekostnad. (2 poeng)

Bedriften har som mål å maksimere overskuddet når den opptrer som prisfast kvantumstilpasser i markedet for x-varen som selges til pris p per enhet.

2. Hva er betingelsen for at bedriften vil være i drift? (2 poeng)

3. Gitt at drift er lønnsomt, bestem da det kvantum som maksimerer profitten. (2 poeng)

4. Hva er bedriftens tilbudsfunksjon og hvordan varierer tilbudt kvantum med produktprisen? (2 poeng)

Anta at bedriften nå kan opptre som monopolist i ferdigvaremarkedet og at den står overfor en etterspørselsfunksjon $D(p) = p^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, der ε er en positiv konstant.

5. Utled førsteordensbetingelsen for monopolistens profittmaksimeringsproblem. (3 poeng)

6. Hvilket krav må stilles til størrelsen på ε for at kvantum i foregående punkt maksimerer profitten? Forklar i ord hva dette kravet betyr. (3 poeng)

Oppgave 8 *(max 9 poeng)*

Hva er virkning på markedspris og omsatt kvantum om det innføres en stykkavgift på en vare som omsettes i et fullkomment konkurransemarked. Gjør spesielt rede for når det er riktig å si at «forbrukeren betaler hele avgiften».

Oppgave 9 *(max 5 poeng)*

Hva betyr det at en persons etterspørsel etter en vare er homogen av grad null i priser og inntekt?