# 1 Oppgave 1

a)

$$dg = g'_x dx + g'_t dt$$

b)

$$p(x)x - (k+t)x$$

gir

$$g(x,t) = p'(x)x + p(x) - (k+t) = 0$$

c)

$$dg = 0$$

d)

$$\begin{aligned} g'_x dx + g'_t dt &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{g'_t}{g'_x} = \frac{1}{g'_x} < 0 \end{aligned}$$

Hvor fortegnet kommer fra 2. ordens betingelsen:

$$g'_x < 0$$

e) Skriver om $g$:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= p'(x)x + p(x) - (k+t) \\ &= p(x)(\frac{p'(x)x}{p(x)} + 1) - (k+t) \end{aligned}$$

Nå er

$$\frac{p'(x)x}{p(x)} = \frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Vi setter inn i uttrykket for $g$

$$g(x,t) = p(x)(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}) - (k+t)$$

Siden elastisiteten er konstant gir det

$$g'_x = p'(x)(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}) < 0 \text{ for } |\varepsilon| < 1$$

# 2 Oppgave 2

a)

$$du = u'_x dx + u'_y dy$$

b)

$$dm = xdp + pdx + qdy$$

c) Førsteordens-betingelsen er

$$\begin{aligned} \frac{u'_x}{u'_y} &= \frac{p}{q} \\ u'_x &= \frac{p}{q} u'_y \end{aligned}$$

Fra a), når $du = 0$, får vi

$$\begin{aligned} 0 &= u'_x dx + u'_y dy = \frac{p}{q} u'_y dx + u'_y dy \\ &= \frac{u'_y}{q} (pdx + qdy) \end{aligned}$$

Altså

$$pdx + qdy = 0$$

d)

$$\begin{aligned} dm &= xdp + pdx + qdy \\ &= xdp \end{aligned}$$

Eller

$$\frac{dm}{dp} = x$$

# 3 Oppgave 3

a) Doblet faktorbruk gir doblet produktmengde

$$(2x_1)^{0.5}(2x_2)^{0.5} = 2(x_1)^{0.5}(x_2)^{0.5}$$

b)

$$c = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

c) Løser $y = \sqrt{x_1}\sqrt{4}$ og finner $x_1$:

$$x_1 = y^2/4$$

Sammen med $x_2 = 4$, gir det

$$c = w_1 y^2/4 + 4w_2$$

d)Problemet er

$$\begin{aligned} & \min w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{s.t.} y &= \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \end{aligned}$$

Kan forenkle bibetingelsen $y = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ til $y^2 = x_1 x_2$, og da får vi Lagrange-funksjonen

$$\begin{aligned} L &= w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1 x_2 - y^2) \\ L_1 &= w_1 - \lambda x_2 = 0 \\ L_2 &= w_2 - \lambda x_1 = 0 \end{aligned}$$

som gir:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

e) For $w_1 = w_2 = 1$ betyr det

$$x_1 = x_2$$

og bibetingelsen er

$$y = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_1} = x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y \end{aligned}$$

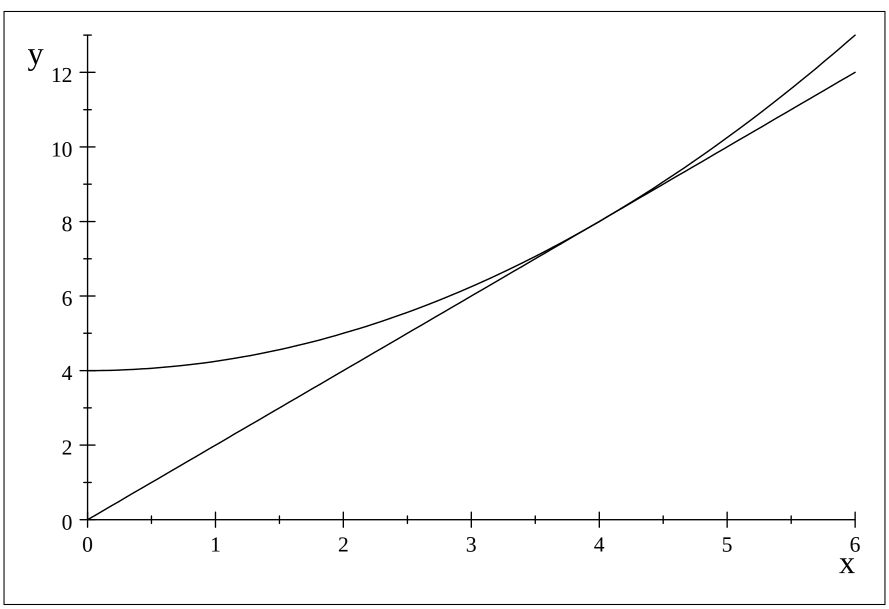
f) Som gir

$$c = x_1 + x_2 = 2y$$

g) Kostnadene i c blir for $w_1 = w_2 = 1$ :

$$c = y^2/4 + 4$$

Som grafisk blir:



I punktet $y = 4$ faller de sammen fordi vi uansett ville ønsket $x_2 = y = 4$ så $x_2 = 4$ utgjør ingen begrensning. For $y \neq 4$ vil imidlertid $c = 2y$ alltid gi de laveste kostnadene.

h) Marginalkostnadene er 2 når $x_2$er fri, men for $x_2 = 4$ blir det

$$c' = \frac{1}{2}y$$

som er mindre enn 2 for $y < 4$. For $y$ , større enn 4, blir det en hemsko å ikke kunne øke $x_2$.

# 4 Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} & \max f(L,K) \\ \text{s.t.} B &= wL + rK \end{aligned}$$

Standard nyttemaksimering, Lagrange eller innsetting gir

$$\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r}$$

d)

$$f'_L = f'_K = 0,5$$

Sykehuset er altså tilpasset slik at marginalavkastningen på begge faktorer er lik 0,5, altså for hver enhet ekstra av en faktor øker produksjonen med 0,5. Den oppgitte formen

$$\frac{1}{f'_K} = 2$$

betyr at det kreves to enheter ekstra kapital for å øke produksjonen en enhet. (La $\Delta K$ være en kapitaløkningen som gir en enhet økning i produksjonen, dvs $\Delta K \cdot f'_K = 1$ eller $\Delta K = \frac{1}{f'_K}$)

e)

$$\frac{f'_L}{f'_K} = 1 \neq \frac{1}{2} = \frac{w}{r}$$

Eller

$$\frac{f'_L}{w} = 0,5 > \frac{1}{4} = \frac{f'_K}{r}$$

altså overinvestering i kapital.

f)

$$\frac{f'_L}{f'_K} = s(\frac{K}{L}) \text{ der } s' > 0$$

Første del betyr at marginal trasformasjonsbrøk avhenger av faktorforholdet, mer spesifikt at substitumalen er en rett linje. $s' > 0$ sier at relativ avkastningen av arbeidskraft øker jo større kapitalintensitet.

g)

$$s(k(w)) = \frac{w}{r}$$

gir ved implisitt derivasjon

$$\begin{aligned} s'(k)k'(w) &= \frac{1}{r} \\ k'(w) &= \frac{1}{rs'(k)} > 0 \end{aligned}$$

Jo dyrere arbeidskraft jo mer kapitalintensiv blir effektiv faktorbruk.

# 5 Oppgave 5

a) Implisitt derivasjon gir

$$\begin{aligned} f'_x x'_a + f'_a &= 1 \\ x'_a &= \frac{1 - f'_a}{f'_x} \end{aligned}$$

Hvordan vi i prinsippet finner $x(a)$ er ved å løse ligningen når det lar seg gjøre.

b) $r$ inngår i alle argumentene, og i de to siste leddene må vi bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} g'(r) &= F'_1 - F'_2 + F'_3 \frac{-1}{(1-r)^2}(-1) \\ &= F'_1 - F'_2 + F'_3 \frac{1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

# 6 Oppgave 6

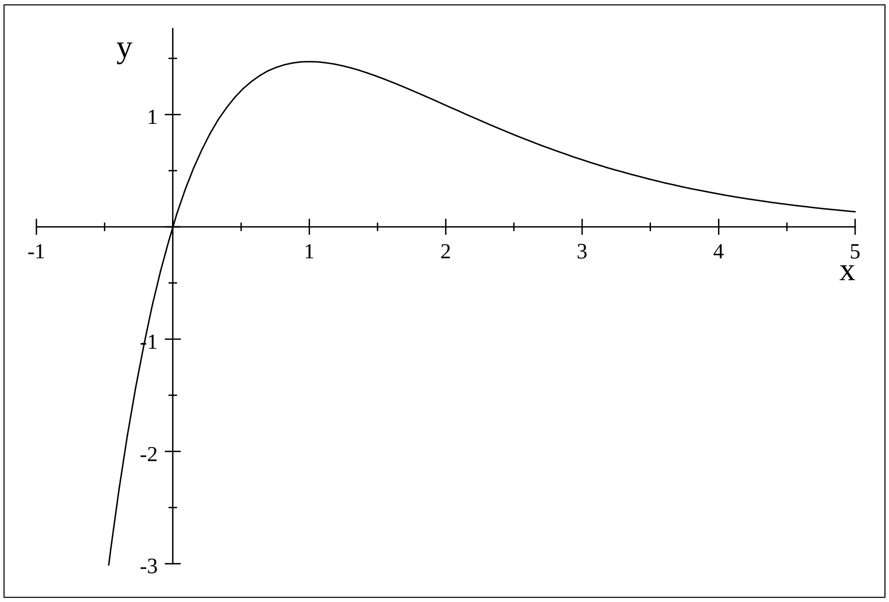
Førsteordensbetingelse

$$\begin{aligned} f(x) &= 4xe^{-x} \\ f'(x) &= 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sjekker andreordensbetingelsen

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4e^{-x} - 4e^{-x} + 4xe^{-x} \\ &= 4e^{-x}(x-2) \\ f''(1) &< 0 \end{aligned}$$

altså et lokalt maksimum.




Vi ser at funksjonen har et vendepunkt i x=2 og er konveks for x>2, men den har ikke noe lokalt minimum. Faktisk er det lokale maksimum i $x = 1$ et globalt maksimum.

Dette siste ser vi ved å se på de førstederiverte

$$f'(x) = 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 4e^{-x}(1 - x)$$

som vi ser er

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ for } x < 1 \\ f'(x) &< 0 \text{ for } x > 1 \end{aligned}$$

Vi kan altså fastslå et globalt maksimum ved å se på fortegnet på de førstederiverte, mens den andrederiverte bare forteller oss at vi har et lokalt maksimum.