Oppgaver til forelesning mandag 23. februar, 16-18.

February 20, 2009

Oppgave 1

Del I: Maksimer følgende funksjoner med hensyn på x. Sjekk også tilstrekkelige betingelser.

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x) &= px - cx^2 \\ \text{b) } g(x) &= \sqrt{x} - cx \\ \text{c) } h(x) &= \sqrt{x} + \sqrt{m-x} \text{ der } x \in [0, m]\end{aligned}$$

Del II I alle tilfeller la x^* være en funksjon av parametrene i problemet. Finn den optimale verdien som funksjon av parametrene

$$\begin{aligned}\text{a) Finn funksjonen } F(p,c) &= f(x^*(p,c)) \\ \text{b) Finn funksjonen } G(c) &= g(x^*(c)) \\ \text{c) Finn funksjonen } H(m) &= f(x^*(m))\end{aligned}$$

Del III: Finn de deriverte (i a de partiellderiverte) til funksjonene F, G og H. Sett så opp de opprinnelige funksjonene som om også parametrene var variabler, og derivier som angitt

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x,p,c) &= px - cx^2 \text{ Partiellderiver mhp } c\text{, og } p \\ \text{b) } g(x,c) &= \sqrt{x} - cx \text{ Deriver med hensyn på } c \\ \text{c) } h(x,m) &= \sqrt{x} + \sqrt{m-x} \text{ der } x \in [0,m] \text{ Deriver med hensyn på } m\end{aligned}$$

Sammenligne de to svarene i del III.

Oppgave 2

La $F(x,a)$ være en funksjon av to variable. Anta at for en gitt verdi av a finnes en entydig indre løsning av maksimeringsproblemet

$$\max_x F(x,a)$$

og la $x^*(a)$ være den optimale løsningen.

a) Hvilken nødvendig betingelse karakteriserer denne løsningen

La nå funksjonen $f(a)$ være gitt som

$$f(a) = F(g(a), a)$$

b) Finn den deriverte $f'(a)$

c) Anta så at $g(a) = x^*(a)$. Vis at i dette tilfellet må

$$f'(a) = F'_a(x^*(a), a)$$

d) Det er oppgitt i starten av oppgaven av det finnes en entydig indre løsning. Hva kan du utfra dette si om

$$F''_{xx}(x^*(a), a)?$$

e) Dersom du får oppgitt at $F'_a > 0$ hva kan du da si om fortegnet til

$$x^{*\prime}(a)?$$

Oppgave 3

a) Finn stasjonærpunktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$$

der a er en parameter.

b) For hvilke verdier av a er stasjonærpunktet et minimum, et maksimum eller ingen av delene.

Oppgave 4

En bedriften har to produksjonsanlegg med produktfunksjoner

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 2\sqrt{x_1} \\ f_2(x_2) &= 8\sqrt{x_2} \end{aligned}$$

der total bruk av faktoren blir $x_1 + x_2$ og prisen på innsatsfaktoren er μ. Prisen på produktet som produseres er p.

a) Hva blir bedriftens profitt?

b) Anta at $p = 1$, finn et uttrykk for den optimale faktorbruken i hvert produksjonsanlegg.

c) Beskriv total faktorbruk som en funksjon av prisen på innsatsfaktoren μ.

d) For hvilken pris μ vil bedriften bruke akkurat 300 enheter av innsatsfaktoren?