Universitetet i Oslo
Økonomisk Institutt
Kjell Arne Brekke, Rom 1032
Diderik Lund, Rom 1128

ECON2200 - Matematikk 1/Mikroøkonomi 1, Våren 2010
Oppgaver til seminaruke 4, Kalenderuke 10

Oppgave 1

Anta at et kartell har to bedrifter. Den ene bedriften produserer x_1 enheter og den andre x_2 enheter. Kostnadene i de respektive bedriftene er gitt ved funksjonene $C_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ og $C_2(x_2) = 100x_2$. Anta at kartellet i alt vil produsere 300 enheter.

a) Hvor mye vil det produsere i hver av de to bedriftene for å minimere kostnadene?
b) Illustrer tilpasningen i et diagram.
c) Regn ut totalkostnaden ved den optimale fordeling av produksjonen mellom bedriftene.
d) Anta at kartellet har valgt å produsere 150 enheter i hver bedrift. Hvor store unødige kostnader pådrar kartellet seg da?

Oppgave 2

La

$$Y = F(K,L,E) = AK^a L^b E^c \text{ der } A,a,b,c > 0 \text{ og } a+b+c \leq 1$$

der L er antall arbeidere, K er kapital (mengden produksjonsutstyr) og E er energibruken til bedriften. Y er produksjon (der alle størrelser gjelder for en gitt periode).

a) Finn de partiell-deriverte $\frac{\partial Y}{\partial K}$, $\frac{\partial Y}{\partial L}$ og $\frac{\partial Y}{\partial E}$.

b) Vis at

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} > 0$$

c) Den partiellderiverte $\frac{\partial Y}{\partial L}$ kan tolkes som produksjonsøkningen ved å ansette en ekstra arbeider. Hva betyr da resultatet i b), at $\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} > 0$?

d) Finn de dobbelt-deriverte $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}$ og $\frac{\partial^2 Y}{\partial E^2}$, og bestem fortegnene. Tolk resultatet.

e) Tegn grafen til $\frac{\partial Y}{\partial L}$ i et diagram, få fram i diagrammet at $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$, og illustrer til slutt i diagrammet hva som skjer med $\frac{\partial Y}{\partial L}$ dersom K øker.

f) Anta at

$$K = f(t)$$
$$E = g(t)$$

mens L er uendret når t endres. (Eksempelvis kan t være skatt, og bedriften tilpasser kapital og energibruk til endring i skattenivået, men kan ikke endre antall sysselsatte.) Finn et uttrykk for $\frac{dY}{dt}$.

Oppgave 3

Anta at en produktfunksjon er gitt ved følgende

$$x = \gamma(\delta n^{\rho} + (1-\delta)k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

der γ, δ, og ρ er parametere.

a) Regn ut grenseproduktivitetene.
b) Regn ut den marginale tekniske substitusjonsbrøk.
c) Finn ligninga for en isokvant.

Oppgave 4

La

$$f(x,y) = (4 + x + y)(2x + y)$$

Finn et stasjonærpunkt til *f*, og avgjør om det er et maksimum, minimum eller ingen av delene.

Oppgave 5

La

$$f(x,y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - q(x+y) \text{ for } x,y \geq 0$$

være profitten til en konsern som har to bedrifter, der x er bruken av innsatsfaktorer i den ene bedriften og y er bruken i den andre. *q* er en prisen på innsatsfaktoren, og er positiv.

a) Finn et stasjonærpunkt til *f*, og avgjør om det er et maksimum, minimum eller ingen av delene.
b) Finn den prisen *q* som gjør at konsernet totalt vil bruke *45* enheter av innsatsfaktoren.

Betrakt nå optimaliseringproblemet: Maksimer $f(x,y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ under bibetingelsen $x + y = 45$

c) Løs problemet med Lagranges metode.
d) Forklar hvordan du kunne funnet den samme løsningen ut fra punktene a og/eller b. Bruk dette til å diskutere tolkningen av Lagrangemultiplikatoren.