Kostnadsminimering; to variable innsatsfaktorer

- Avsnitt 3.2 i *ØABL* drøfter kostnadsminimering
- Som om produktmengden var en gitt størrelse
- Avsnitt 3.3–3.8: Velger produktmengde for maks overskudd
- Men uansett produktmengde: Minimum kostnad for denne x
- Avhenger av prisene w og q på innsatsfaktorene n og k
  - Selvsagt, kostnad består av kostnader til faktorene, $wn+qk$
  - Uten substitusjon ville dette beskrive hele sammenhengen
  - Men mer komplisert: Velg punkt (n, k) langs isokvant
  - For gitte w, q velges dette for å minimere kostnaden
  - Kalles *betinget faktoretterspørsel,* $\tilde{n}(x, w/q), \tilde{k}(x, w/q)$
  - (Skal bl.a. vise at w, q ikke opptrer hver for seg, bare w/q)
  - Kostnadsfunksjonen er $C(x; w, q) = w\tilde{n}(x, w/q)+q\tilde{k}(x, w/q)$
- Ønsker altså $\min_{n,k} wn+qk$ gitt at $f(n, k) = x$, som er eksogen
- Lagrangefunksjonen blir $\mathcal{L}(n, k) = wn + qk - \lambda(f(n, k) - x)$
- To førsteordensbetingelser og en bibetingelse,
  - $w - \lambda f_n = 0$ (der f_n betyr $\partial f(n, k)/\partial n$)
  - $q - \lambda f_k = 0$ (tilsv.)
  - $f(n, k) = x$
- Tre likninger i n, k og λ
- λ i løsningspunktet er kostnaden ved å øke x med en enhet

Isokostlinjer og tangeringsbetingelse

- Løsningen fra forrige side innebærer bl.a.

$$\frac{f_n(n,k)}{f_k(n,k)} = \frac{w}{q}$$

- Gjenkjenner venstre side: Marginal teknisk substitusjonsbrøk
- En bestemt MTSB betyr et bestemt punkt langs isokvanten
- Begrepet *isokostlinje* nyttig for å tolke likningen ovenfor
- For gitte w, q: Kombinasjoner av n, k som gir en viss $wn + qk$
- Denne summen er *kostnadsbudsjettet,* $S = wn + qk$
- Løser for k; en isokostlinje er gitt ved $k = S/q - wn/q$
- En fallende linje i (n, k)-diagrammet med stigningstall $-w/q$
- For gitt w/q er det mange parallelle isokostlinjer med ulike S
- Kostnadsminimum krever tangering mellom isokost og isokvant

Betingede faktoretterspørselsfunksjoner

- Faktoretterspørsel betinget av produktmengde
- $\tilde{n}(x, w/q)$ og $\tilde{k}(x, w/q)$
- Ville tro, i utgangspunktet, at de avhenger av x, w, q
- Men har sett at optimal n, k bestemmes av to likninger
- MTSB $= w/q$ og $x = f(n, k)$
- Her opptrer w, q ikke hver for seg, bare forholdet mellom dem
- Hvis både w og q blir doblet, er samme n, k optimale
- Samme tangeringspunkt med isokost, selv om S blir doblet
- Kunne gjerne skrive $n(x, w, q), k(x, w, q)$
- De betingede faktoretterspørslene $n(w, q), k(w, q)$ er homogene av grad 0 (—her er x konstant og underforstått)
- For et positivt tall t er $n(tw, tq) = n(w, q)$ (og tilsv. for k)
- Oppsummert: Alltid mulig å skrive $\tilde{n}(x, w/q)$ og $\tilde{k}(x, w/q)$
- Disse funksjonene er ikke homogene (av grad 0 eller noen annen grad)
- Men faktoretterspørslene oppfattet som funksjoner av (x, w, q) er homogene av grad 0 i (w, q) for enhver konstant x

Substitumaler

- Navn på kurver i (n, k)-planet
- Når produktfunksjonen er gitt:
- En substitumal for hvert faktorprisforhold w/q
- Knytter sammen kostnadsminimerende (n, k) for ulike x
- (Knytter sammen kostnadsminimerende (n, k) for ulike S)
- Beskriver hvordan faktorbruk vil ekspandere hvis w/q konstant
- Gitt w/q: Substitumalen bestemt av produktfunksjonen alene
- For noen produktfunksjoner er alle substitumaler rette linjer
- Mer generelt: Kurver; vanligvis voksende i diagrammet
- (Større x medfører vanligvis mer bruk av begge faktorer)
- Men mulig at bruk av en faktor vil gå ned når x øker
- Skal ikke vise matematisk eksempel, men illustrere grafisk

Kostnadsfunksjonen og grensekostnaden

- Først en rekapitulering:
  - Tidligere så vi på korttidskostnadsfunksjonen $c(x; w)$
  - Basert på en gitt verdi $k = \bar{k}$; inkluderte ikke qk
  - For gitt k har produktfunksjonen bare en variabel, $F(n)$
  - Kunne invertere; $n = G(x)$, og finne $c(x; w) = wG(x)$
  - Ikke noe valg av optimal faktorkombinasjon (n, k)
  - Økt x langs horisontal linje i (n, k)-diagram
- Når k også kan velges fritt: Økonomisk valg av faktorene
- (I motsetning til mekanisk invertering av F-funksjonen)
- Økt x langs substitumalen, ikke langs horisontal linje
- For gitt w/q: Entydig bestemt hvordan ekspandere
- Derfor også entydig bestemt grensekostnad
- Skal vise at denne er lik λ fra Lagrangefunksjonen (se s. 1)
- Husker fra s. 1 at $w = \lambda f_n$ og $q = \lambda f_k$
- Trenger dessuten et resultat
  $1 = f_n \dfrac{\partial \tilde{n}}{\partial x} + f_k \dfrac{\partial \tilde{k}}{\partial x}$ som følger av $x = f\left(\tilde{n}\left(x, \dfrac{w}{q}\right), \tilde{k}\left(x, \dfrac{w}{q}\right)\right)$
- Kostnadsfunksjonen er $C(x; w, q) = w\tilde{n}(x, w/q) + q\tilde{k}(x, w/q)$
- Grensekostnaden er derfor
  $$\frac{\partial C(x; w, q)}{\partial x} = w\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} + q\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} = \lambda\left(f_n\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} + f_k\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x}\right) = \lambda$$

Grense- og gjennomsnittskostnader og skalaelastisitet

- Gjennomsnittskostnaden er nå $\bar{C}(x; w, q) = \frac{C}{x}$
- Fra tidligere (forelesn. 8.02. s. 12, *ØABL* s. 43):
- Hvis og bare hvis $C_x > \bar{C}$, vil $\partial\bar{C}/\partial x > 0$
- Dette gjelder også når det er to variable faktorer:

$$\frac{\partial\left(\frac{C}{x}\right)}{\partial x} = \frac{xC_x - C}{x^2} = \frac{1}{x}(C_x - \bar{C}) > 0 \Leftrightarrow C_x > \bar{C}$$

- Kan vise sammenheng mellom disse ulikhetene og skalaelastisitet

$$\bar{C} = \frac{1}{x}\left[w\tilde{n}\left(x, \frac{w}{q}\right) + q\tilde{k}\left(x, \frac{w}{q}\right)\right] = \frac{\lambda}{x}\left[f_n\tilde{n} + f_k\tilde{k}\right]$$

$$= \lambda\left(\frac{f_n\tilde{n}}{x} + \frac{f_k\tilde{k}}{x}\right) = (\varepsilon_n + \varepsilon_k)\lambda = \varepsilon \cdot C_x$$

- Dette betyr: $\bar{C}$ er voksende i x hvis og bare hvis $\varepsilon < 1$
- Skalaelastisiteten ε er generelt en funksjon $\varepsilon(n, k)$
- Spesialtilfelle: $\varepsilon(n, k) = 1$ for alle (n, k); da gjelder:
  - Gjennomsnittskostnad er konstant og lik C_x for alle x
  - Produktfunksjon homogen av grad 1 (forelesn. 2.03. s. 13)
  - Grenseproduktivitetene er homogene av grad 0
  - $f_n(tn_0, tk_0) = f_n(n_0, k_0)$ og $f_k(tn_0, tk_0) = f_k(n_0, k_0)$
  - f_n/f_k endrer seg ikke ved proporsjonal endring i (n, k)
  - Medfører at substitumalene er rette linjer gjennom origo
  - Kostnadene er proporsjonale med x, kan skrives $C(x, w, q) = \varphi(w, q) \cdot x$

Normale og inferiøre faktorer

- Vanligvis er substitumalen voksende i (n, k)-diagrammet
- Dvs. bruken av begge faktorer øker når x øker
- Men for noen $\frac{w}{q}$ og noen (n, k) kan dette være annerledes
- Teoretisk mulig at enten $\tilde{n}(x, w/q)$ eller $\tilde{k}(x, w/q)$ avtar i x
- Kan tenkes produktfunksjoner der dette skjer for noen $x, w/q$
- Men både $\tilde{n}$ og $\tilde{k}$ voksende nær $x = 0$ (for alle f)
- Og begge, $\tilde{n}$ og $\tilde{k}$, kan ikke avta for samme $(x, w/q)$
- I et $(x, w/q)$ der en betinget faktoretterspørsel avtar i x, kalles faktoren *inferiør;* faktoren kalles *normal* når den vokser i x

Virkning av endret faktorpris, Shephards lemma

- Hva skjer med kostnader ($C, \bar{C}$ og C_x) ved endret w eller q?
- Åpenbart at C og $\bar{C}$ ikke øker hvis f.eks. w avtar
  - Kunne jo velge å produsere x med uendret faktorkombinasjon
  - Med uendret (n, k) vil $C = wn + qk$ avta hvis w avtar
  - Med uendret (n, k) vil også $\bar{C} = C/x$ avta
  - Kan alternativt velge en annen (n, k) langs samme isokvant
  - Dette vil typisk skje; sparer kostnader ved endret w/q
  - Da avtar C og $\bar{C}$ ytterligere
- Men hva vil skje med grensekostnadene, C_x?
- Skulle kanskje tro at disse også er voksende i w?
- Viser seg at dette stemmer når n er en normal faktor
- Men ikke for punkter $f(n_0, k_0)$ der n er inferiør:
- Shephards lemma: $\tilde{n}(x, w/q) = \partial C/\partial w$ (og tilsv. for $\tilde{k}$)
- (Bruk omhylningsteoremet på kostnadsminimeringsproblemet)
- (Sydsæter slutten av avsn. 14.6, *ØABL* oppg. 2 s. 114)
- Om vi deriverer Shephards lemma mhp. x, får vi

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C(x; w, q)}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 C(x; w, q)}{\partial w \partial x} = \frac{\partial C_x(x; w, q)}{\partial w}$$

Profittmaksimering

- Bedriften vil søke størst mulig profitt (også kalt overskudd)
- Forskjell mellom *ØABL* avsn. 3.3 og avsn. 2.3:
- Nå er det to variable faktorer og substitusjonsmuligheter
- Kostnadene til kapital er fratrukket i overskuddsbegrepet
- Sammenheng mellom pris, grense- og gjennomsnittskostnad som før
- Når faktorprisene w, q er gitte størrelser:
    - Kostnadsminimum er nødvendig betingelse for profittmaksimum
    - Profittmaksimum er et punkt på denne substitumalen
    - Velger å produsere hvis p overstiger minimum $\bar{C}(x, w, q)$
    - Velger i så fall en x der
        - $C_x = p$
        - $C_{xx} > 0$
- Men nytt: Vil generelt endre k/n langs substitumalen
- (Unntak hvis f er homogen av grad 1, rettlinjet substitumal)