University of Oslo / Department of Economics / Nils Framstad 9. mars 2011

ECON2200: Oppgaver til for plenumsregninger

Revisjoner 9. mars 2011:

- Nye oppgavesett til 15. og 22. mars.
- Har benyttet sjansen til endelig å bli kvitt noen lettere pinlige trykkfeil. (Inkludert tittelen `:-o`)

1. plenumsregning 1. feb.: derivasjon

Oppgave 1.1 Funksjonen $f(x)$ er gitt som

$$f(x) = A$$

der A er en konstant.

(a) For en vilkårlig x_0 og h hva blir

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad ?$$

(b) Hva blir den deriverte av f?

Oppgave 1.2 La

$$f(x) = x^2 + 2x$$

(a) Beregn

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

når $x_0 = 1$ og med h hhv $\frac{1}{10}$, 1 og 2.

(b) Beregn

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

for samme $x_0 = 1$ men med en generell h, og finn grensen når $h \to 0$.

(c) Hva blir $f'(1)$?

(d) Bruk fremgangsmåten i (b) til å finne $f'(x_0)$ for en generell x_0 (altså ikke bare for $x_0 = 1$).

(e) Når er funksjonen voksende og når er den avtagende?

Oppgave 1.3 En aluminiumsprosusent produserer x kg aluminium. Produksjonskostnadene til bedriften er en funksjon $C(x)$ av hvor mye bedriften produserer.

(a) Fortell med ord hva den deriverte $C'(x)$ uttrykker.

Prisen på aluminium er bestemt på verdensmarkedet og er gitt som p. Profitten til bedriften er da

$$px - C(x)$$

(b) Finn et uttrykk som forteller når profitten er voksende i produsert mengde.

(c) Prøv å beskrive uttrykket i (b) med ord på en måte som er forståelig også for dem som aldri har hørt om derivasjon.

Oppgave 1.4 Bruk derivasjonsreglene til å derivere følgende funksjoner

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 + 1 \\
g(x) &= x^3 - \frac{1}{x} \\
h(x) &= x^{-1}(x^2 - 1) = \frac{x^2 - 1}{x} \\
k(x) &= \frac{x + 3}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

Oppgave 1.5 En monopolist produserer en mengde x av en vare, men må sette prisen slik at han får solgt alt sammen. Prisen er da en funksjon $p(x)$ av x.

(a) Hva synest du det er rimelig å anta om fortegnet på $p'(x)$?

Total inntekt for monopolisten blir

$$f(x) = xp(x)$$

(b) Finn $f'(x)$

(c) Forklar med ord hva $f'(x)$ uttrykker.

2. plenumsregning 8. feb.: kjerneregelen, annenderiverte, elastisiteter

Oppgave 2.1 (a)–(d) Bruk kjerneregelen til følgende derivasjoner :

(a) $y = (3x+1)^2$ (b) $y = (1-x)^3$ (c) $y = \sqrt{3x^2+1}$ (d) $y = \sqrt{-x}$, der $x < 0$

(e)–(h) Uttrykk g' ved hjelp av f' for følgende funksjoner:

(e) $g(x) = (f(x))^2$ (f) $g(x) = f(3x)$ (g) $g(x) = f(x^2 - x)$ (h) $g(x) = f(f(x))$

Oppgave 2.2 Anta at total kjørelengde med bil reduseres med 0,6 % når bensinprisen øker 10 øre per liter. Anta videre at CO_2-utslippene fra bilkjøring er proporsjonale med total kjørelengde, og at bilkjøring står for 17 % av de nasjonale utslippene. Hvor mange % endres de nasjonale CO_2-utslippene om bensinprisen øker 50 øre per liter?

Oppgave 2.3 En aluminiumsprodusent produserer x kg aluminium. Produksjonskostnadene til bedriften er en funksjon $C(x)$ av hvor mye bedriften produserer.

(a) Prøv å si med med ord hva påstanden $C''(x) > 0$ innebærer.

Prisen på aluminium er bestemt på verdensmarkedet og er gitt som p per kg. Profitten til bedriften er da

$$\pi(x) = px - C(x)$$

(b) Finn et uttrykk for $\pi''(x)$

(c) Hvilke forutsetninger om kostnadsfunksjonen $C(x)$ må vi gjøre for at profitten skal være konkav?

Oppgave 2.4

(a) Avgjør om følgende funksjoner er konkave eller konvekse

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 1 \\ g(x) &= x^3 + \frac{1}{x} \qquad \text{for } x > 0 \\ h(x) &= 3x \end{aligned}$$

(b) For hvilke(t) intervall(er) er følgende funksjon konkav og for hvilke(t) intervall(er) er den konveks?

$$k(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

Oppgave 2.5 Beregn elastisiteten til følgende funksjoner

(a)	$f(x) = \sqrt{x}$	for $x \geq 0$
(b)	$f(x) = 30 - 3x$	for $0 \leq x \leq 10$
(c)	$f(x) = \frac{1}{x}$	for $x \geq 0$
(d)	$f(x) = 3x + 30$	for $x \geq 0$

Oppgave 2.6

(a) Dersom $f'(x) = 4$ for alle verdier av x, hvor mye øker funksjonsverdien om vi øker x med 100 enheter?

La etterspørselen etter en vare være

$$D(p) = p^{-a} \text{ der } a > 0$$

(b) Vis at elastisiteten til D er konstant.

(c) Anta at $a = 1$. Hvor mye faller etterspørselen om prisen øker med 100 %?

3. plenumsregning *torsdag* 17. feb.: Optimalisering

Oppgave 3.1 Maksimer følgende funksjoner

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} - x \qquad \text{for } x \geq 0 \\ g(x) &= 10 - 3x \qquad \text{for } x \geq 0 \\ h(x) &= 18x - x^2 \end{aligned}$$

Oppgave 3.2 Et sykehus fordeler et budsjett M på to aktiviteter. De rangerer ventelisten innen hver aktivitet etter hvilken helsegevinst behandlingen har for pasientene, og de behandler de pasentene først som har størts helsegevinst. La $f(x)$ være helsegevinsten om x pasienter behandles med metode 1 og $g(x)$ være total helsegevinst om x behandles med metode 2.

(a) Hva kan du si om $f''(x)$ og $g''(x)$?

(b) Er det rimelig her å betrakte x som kontinuerlig (dvs. at x kan være et vilkårlig reelt tall)?

Prisen per pasient med metode 1 er p og for metode 2 er den q.

(c) Hva blir helsegevinsten av 1 krone ekstra til hhv. metode 1 og metode 2?

Sykehuset ønsker å fordele ressursene for å få størst mulig helsegevinst av budsjettet M.

(d) Sett dette opp som et maksimeringsproblem og finn førsteordensbetingelsen.
Kan du tolke denne betingelsen?

(e) Kan vi være sikre på at førsteordensbetingelsen gir oss et maksimum?

Oppgave 3.3

(a) Finn stasjonærpunktene til funksjonen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

(b) Er disse punktene lokale maksimum eller minimum?

(c) Er de globale optima?

Oppgave 3.4 En bedrift produserer en vare med konstante enhetskostnader, dvs. hver enhet koster c kroner. Prisen på produktet er p så profittfunksjonen er

$$\pi(x) = px - cx \text{ for } x \geq 0$$

(a) Hva er profittmaksimerende kvantum x?

(b) Er profittfunksjonen konkav?

(c) Er profittfunksjonen strengt konkav?

Oppgave 3.5 I denne oppgaven skal vi maksimere funksjonen

$$f(x) = u(x) + m - px \text{ for } x \geq 0 \text{ og } px \leq 0$$

(a) Anta først at løsningen er en indre løsning (dvs. $x > 0$ og $px < m$). Finn førsteordensbetingelsen.

(b) Er andreordensbetingelsen oppfylt?

Til slutt skal du sjekke om vi har en hjørneløsning.

(c) Under hvilke betingelser vil $x = 0$ løse problemet?

(d) Under hvilke betingerlser vil $px = m$ løse problemet?

Oppgave 3.6 (a)–(d) Finn de partiellderiverte til følgende funksjoner:

(a) $f(x, y) = 3xy$ (b) $f(x, y) = x + 3y$ (c) $f(x, y) = x - xy + y$ (d) $f(x, y) = y$

(e)–(h) Uttrykk de partiellderiverte av $F(x, y)$ ved hjelp av $f'(x)$ og $g'(y)$ for følgende funksjoner:

(e) $F(x, y) = f(x)g(y)$ (f) $F(x, y) = f(x) - g(y)$ (g) $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$ (h) $F(x, y) = f(x)$

4. plenumsregning 22. feb.: flervariabelanalyse

Oppgave 4.1 Bruk kjerneregelen til å derivere z med hensyn på t når:

$$\begin{array}{lccl} \text{(a)} & z = & xy & \text{der } x = t \text{ og } y = t^2 - 1 \\ \text{(b)} & z = & x + y & \text{der } x = t \text{ og } y = t^2 - 1 \\ \text{(c)} & z = & x^2y + 3y & \text{der } x = t \text{ og } y = t^2 - 1 \end{array}$$

Bruk kjerneregelen til å derivere z med hensyn på t og s når:

$$\begin{array}{lccl} \text{(d)} & z = & xy & \text{der } x = t - s \text{ og } y = t + s \\ \text{(e)} & z = & x + y & \text{der } x = t - s \text{ og } y = t + s \\ \text{(f)} & z = & x^2y & \text{der } x = t \text{ og } y = \sqrt{t^2 - s} \end{array}$$

Oppgave 4.2 Tegn nivåkurver til følgende funksjoner:

$$\begin{array}{lccl} \text{(a)} & f(x,y) = & xy + 5 & \\ \text{(b)} & g(x,y) = & Ax^a y^b & \text{der } A, a, b > 0 \\ \text{(c)} & h(x,y) = & x^2 + 3y & \\ \text{(d)} & k(x,y) = & x^2 + y^2 & \end{array}$$

Oppgave 4.3 Deriver y med hensyn på x når sammenhenger er gitt ved identieten

$$x^2 + y^2 \equiv 9$$

Finn også den andrederiverte.

Oppgave 4.4 Anta først at løsningen på følgende maksimeringsproblem er en indre løsning,

$$u(x) = v(x) + 100 - qx \qquad \text{for} \quad x \geq 0, \quad x \leq \frac{100}{q}$$

dvs. $x > 0$ og $px \leq m$.

(a) Finn førsteordenbetingelsen.

(b) Hva er andreordensbetingelsen for at stasjonærpunktet skal være et maksimum?

Betrakt førsteordensbetingelsen som en identitet som implisitt bestemmer x som en funksjon av q.

(c) Finn et uttrykk for $x'(q)$.

(d) Kan du si noe om fortegnet på $x'(q)$?

Oppgave 4.5 La

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ x = t \qquad &\text{og} \qquad y = g(t) \end{aligned}$$

(a) Finn et uttrykk for $\frac{dz}{dt}$.

La nå funksjonen $g(t)$ være valgt slik at z tar verdien $\bar{z}$ for alle valg av t.

(b) Uttrykk dette som en identitet.

(c) Dersom $g(t)$ er valgt på denne måten, kan du da si noe mer om $\frac{dz}{dt}$?

(d) Dersom f er voksende i begge variablene, hva kan du da si om nivåkurvene til funksjonen f?

5. plenumsregning 15. mars (revidert): maksimering med og uten bibetingelser. Omhylling.

Jeg har nok gitt mer stoff til 15. mars enn til 22. Det kan være at enkelte oppgaver vil bli utsatt.

Oppgave 5.1 La

$$F(y,a) = ay - y^2$$

(a) Løs maksimeringsproblemet

$$\max_y F(y,a)$$

og la $y^*(a)$ være den optimale løsningen.

(b) Finn et eksplisitt uttrykk for funksjonen $y^*(a)$

La nå funksjonen $f(a)$ være gitt som

$$f(a) = \max_y F(y,a)$$

(c) Bruk omhylningssetningen til å finne den deriverte $f'(a)$ uten å regne ut funksjonen $f(a)$ selv.

(d) Finn så et eksplisitt uttrykk for $f(a)$, deriver funksjonen og vis at du får det samme som i (c).

Oppgave 5.2 La nå $H(x,a)$ være en generell funksjon av to variable, og la

$$h(a) = H(g(a), a)$$

der $g(a)$ er en gitt funksjon av a.

(a) Finn et uttrykk for $h'(a)$.

Vi lar $x^*(a)$ betegne løsningen på maksimeringsproblemet

$$\max_x H(x,a)$$

og antar at problemet har en entydig indre løsning for alle a.

(b) Hva kan du da si om

$$H'_x(x^*(a), a)?$$

(c) Bruk resultatet i (b) til å forenkle uttrykket i (a) for det tilfellet at $g(a) = x^*(a)$.

Oppgave 5.3

(a) Finn følgende funksjoner:

$$\begin{aligned} f(c) &= \max_x \left(px - cx^2\right) \\ g(c) &= \max_x \left(\sqrt{x} - cx\ \right) \end{aligned}$$

(b) Deriver funksjonene du fant i (a).

(c) Bruk omhylningssetningen til å finne de samme deriverte.

Oppgave 5.4

(a) Finn stasjonærpunktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$$

der a er en parameter.

(b) For hvilke verdier av a er stasjonærpunktet et minimum, et maksimum eller ingen av delene?

(c) Gjør tilsvarende (dvs., (a) og (b)) for funksjonen

$$g(x, y) = x^4 + y^4 + axy$$

Oppgave 5.5 En bedriften har to produksjonsanlegg med produktfunksjoner

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 2\sqrt{x_1} \\ f_2(x_2) &= 8\sqrt{x_2} \end{aligned}$$

der total bruk av faktoren blir $x_1 + x_2$ og prisen på innsatsfaktoren er μ. Prisen på produktet som produseres er p. Bedriften eier i utgangspunktet 300 enheter av innsatsfaktoren.

(a) Hva blir bedriftens profitt?

(b) Anta at $p = 1$, finn et uttrykk for den optimale faktorbruken i hvert produksjonsanlegg.

(c) Beskriv total faktorbruk som en funksjon av prisen på innsatsfaktoren μ.

(d) For hvilken pris μ vil bedriften bruke akkurat 300 enheter av innsatsfaktoren?

(e) Bruk Lagranges metode til å løse bedriftens profittmaksimeringsproblem når den ikke kan handle med innsatsfaktorer, men bare har de 300 enhetene til disposisjon.

Oppgave 5.6 *(Obs: Denne oppgaven involverer uttrykk som kan bli for stygge hvis du forsøker å «regne til bunns». Les hva oppgaven spør om, så sparer du tid!)*
Se på funksjonen
$$h(x, y) = 2x^2 + y^2 - 123456789x^4 - 616y^4 - xy.$$

(a) Beregn de partielle deriverte av første og annen orden.

(b) Vis at origo (det vil si, punktet $(x, y) = (0, 0)$) er et lokalt minimumspunkt.

(c) Prøv å forklare hvorfor origo *ikke* kan være et globalt minimumspunkt.

(d) La k være en konstant. Sett opp Lagrange-betingelsene for problemet

$$\text{minimer } h(x, y) \qquad \text{under bibetingelsen} \quad kx + y = 0$$

og verifiser at de er oppfylt i origo. Kan vi vite at betingelsene er oppfylt i origo uten å regne ut?

Oppgave 5.7 Betrakt problemet:

$$\begin{gathered}\text{Minimer } 2x + y \\ \text{under bibetingelsen } y - (x - 5)^2 = 0\end{gathered}$$

(a) Løs problemet først ved innsettingsmetoden.

(b) Løs deretter problemet med Lagranges metode. Beregn også Lagrangemultiplikatoren.

(c) Finn verdien av $2x + y$ i minimum. Uten å løse problemet på nytt, omtrent hva tror du denne verdien hadde blitt om bibetingelsen var $y - (x - 5)^2 = 0.1$?

6. plenumsregning 22. mars (revidert): implisitt derivasjon m.m.

Obs: Eventuelle tiloversblevne oppgaver fra 15. mars vil bli dekket.

Oppgave 6.1, 6.2: Gjør oppgave 4.3, som ikke ble dekket 22. februar. Dessuten: Definerer den gitte sammenhengen en funksjonsgraf?
Gjør oppgave 4.5, som ikke ble dekket 22. februar.

Oppgave 6.3 Betrakt problemet:

$$\begin{aligned} \text{maksimer } f(x,y) &= xy \\ \text{under bibetingelsen } g(x,y) &= x^2 + y^2 = 32 \end{aligned}$$

(a) Sett opp Lagrangefunksjonen og finn de 4 stasjonærpunktene.

(b) Beregn verdien av $f(x,y)$ i stasjonærpunktene. Hvilke punkter er kandidater til å være maksimumspunkter?

Selv om ligningen $x^2+y^2 = 32$ definerer en sirkel (som ikke er en funksjonsgraf!), vil ligningen definere y implisitt som en funksjon av x *lokalt*, hvis vi først har opplyst hvilket fortegn y skal ha[1].

(c) Finn y' og beregn spesielt verdien i stasjonærpunktene.

Nivåkurvene for funksjonen xy (dvs. ligningen $xy = c$) gir tilsvarende y som en funksjon av x.

(d) Finn et eksplisitt uttrykk for denne funksjonen og deriver den. Beregn igjen spesielt den deriverte i stasjonærpunktene.

(e) Illustrer løsningen grafisk. Bruk resultatene fra (c) og (d).

Oppgave 6.4 Beregn differensialene til

(a) $z = 3x^2 + y^3$, (b) $z = x \ln y$, (c) $z = xu$ der $u = u(x,y)$

der funksjonen $\ln y$ har derivert $1/y$ (dette har dere ikke lært ennå, men bruk resultatet).
Approksimer deretter endringene i z når x øker fra 2 til 2.01, og y avtar fra 1 til 0.98.

Oppgave 6.5 Gå tilbake til oppgave 2.6; husk at svaret på (a) var at 100 enheter opp, gir økning i f på 400 enheter (siden den deriverte er konstant), mens svaret i (c) var at vi *ikke* kunne redusere etterspørselen med 100 %.
Virker ikke dette litt merkelig, tatt i betraktning at elastisiteten også var konstant?
Hva kan forklaringen være?

[1] Forklaring: Sirkelen har sentrum i origo. Grunnen til at den ikke er en funksjonsgraf, er at man (med unntak lengst til venstre og høyre) får to y-verdier ut for enkelte x-verdier, men da vil den ene være positiv og den andre negativ. Hvis vi spesifisere at den ene skal «kastes», står vi igjen med kun én, og da har vi en funksjonsgraf.