EON 2200 – våren 2012
Jon Vislie

# ECON 2200 – våren 2012: Oppgave på plenumsøvelse den 21. mars

*Oppgave 2*

En bedrift produserer en vare i mengde $x$ med produktfunksjonen $x = An^a k^b$, der $n$ er bruk av arbeidskraft og $k$ er realkapital. Bedriften opptrer som prisfast kvantumstilpasser i alle de markedene den opererer.

i) Utled grenseproduktivitetene for de to faktorene. Hvilke krav må legges på $a$ og $b$ for at grenseproduktivitene selv skal være avtakende? Hvorfor er faktorene teknisk komplementære?

**Svar:** Grenseproduktivitetene finner vi direkte ved partiell derivasjon. Vi finner når vi skriver at $x = F(n,k) = An^a k^b$ : $\frac{\partial F}{\partial n} = F_n = aAk^b n^{a-1} = \frac{aAn^{1+a-1}k^b}{n} = a\frac{x}{n}$.

Tilsvarende for $\frac{\partial F}{\partial k} = F_k = bAn^a k^{b-1} = \frac{bx}{k}$. Disse grenseproduktivitene er positive dersom $a > 0$ og $b > 0$. Hvordan grenseproduktivitetene selv varierer finner vi ved å se på produktakselerasjonene som vi skrive på litt ulike måter: De direkte produktakselerasjonene er gitt som:

$$F_{nn} = \frac{\partial}{\partial n}F_n = \frac{\partial}{\partial n}(\frac{\partial F}{\partial n}) = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = a(a-1)Ak^b n^{a-2} = a(a-1)\frac{1}{n^2}An^{a-2+2}k^b = \frac{a(a-1)x}{n^2}$$

som er negativ hvis og bare hvis $0 < a < 1$. Tilsvarende finner vi at

$F_{kk} = b(b-1)\frac{x}{k^2} < 0$ hvis og bare hvis $0 < b < 1$.

Videre finner vi at

$F_{nk} = F_{kn} = \frac{\partial}{\partial k}F_n = \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left[aAk^b n^{a-1}\right] = abAk^{b-1}n^{a-1} = ab\frac{x}{nk} > 0$ med våre antakelser. Faktorene er derfor teknisk kompelemntære siden grenseproduktiviteten til en faktor øker med bruken av den andre faktoren.

ii) Utled grenseelastisitetene og skalaelastisiteten.

**Svar:** Grenseelastisiteten til faktoren $n$ finner vi som den partielle elastisiteten av $F(n,k)$ mhp. $n$; dvs. som $\varepsilon_n = El_n F(n,k) = \frac{n}{x}F_n = \frac{n}{x}a\frac{x}{n} = a$. Tilsvarende for den andre faktoren: $\varepsilon_k = El_k F(n,k) = \frac{k}{x}F_k = \frac{k}{x}b\frac{x}{k} = b$. Nå vet vi at skalaelastisiteten, $\varepsilon$, er gitt som summen av grenseelastisitetene: $\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_k = a + b$

iii) Finn et uttrykk for en isokvant og bestem den marginale tekniske substitusjonsbrøk; dens helning og krumning.

**Svar:** En isokvant viser alle de kombinasjoner av $(n,k)$ som gir samme produktmengde $x_0$. Dermed:

$x_0 = An^a k^b \Leftrightarrow k^b = \frac{x_0}{An^a} = \frac{x_0}{A} n^{-a} \Rightarrow k = \left[\frac{x_0}{A} n^{-a}\right]^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{x_o}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-\frac{a}{b}}$. Da kan vi utlede isokvanthelning som

$$\left(\frac{dk}{dn}\right)_{x=x_0} = (-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-\frac{a}{b}-1} = (-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{a}{b}+1)} = (-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{a+b}{b})} = (-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{\varepsilon}{b})}$$

Med våre antakelser er $\left(\frac{dk}{dn}\right)_{x=x_0} < 0$; isokvanten er fallende i faktordiagrammet.

Men dette betyr at MTSB (den marginale substitusjonsbrøk) er

$$\left(-\frac{dk}{dn}\right)_{x=x_0} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{\varepsilon}{b})}.$$

Isokvantkrumning finner vi ved å se hvordan $\left(\frac{dk}{dn}\right)_{x=x_0}$ selv varierer med $n$. Vi finner da:

$\frac{d}{dn}\left((-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{\varepsilon}{b})}\right) = (\frac{d^2k}{dn^2})_{x=x_0} = (-\frac{a}{b})\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} (-\frac{\varepsilon}{b}) n^{-\frac{\varepsilon}{b}-1} = \frac{a\varepsilon}{b^2}\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-\frac{\varepsilon}{b}-1} > 0$, hvilket betyr at $\frac{d}{dn}\left(-\frac{dk}{dn}\right)_{x=x_0} = \frac{d}{dn}\left(\frac{a}{b}\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{b}} n^{-(\frac{\varepsilon}{b})}\right) < 0$; avtakende MTSB (”isokvantene er krummet mot origo”).

iv) Utled kostnadsfunksjonen, med tilhørende gjennomsnitts- og grensekostnad, under ulike antakelser om skalaelastisiteten.

**Svar:** Følgende problem skal løses: Minimer samlet faktorutlegg $(wn + qk)$ der $w$ og $q$ er faktorpriser, gitt at en bestemt produktmengde skal produseres. La den gitte produktmengden være $x_0 = An^a k^b$. Dette er et minimeringsproblem gitt en isokvantbibetingelse. Vi kan innføre en Lagrangefunksjon med $\lambda$ som Lagrangemultiplikator; $L = wn + qk - \lambda\left[An^a k^b - x_0\right]$. En kostnadsminimerende faktorkombinasjon må nå, i tillegg til bibetingelsen, oppfylle følgende marginalbetingelser:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = w - \lambda \frac{ax}{n} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{wn}{ax}$$
$$\frac{\partial L}{\partial k} = q - \lambda \frac{bx}{k} = 0$$

Setter vi inn $\lambda = \frac{wn}{ax}$ i den andre av disse, kan denne skrives som:

$q - \lambda b \frac{x}{k} = 0 \Leftrightarrow q - b \frac{wn}{ax}\frac{x}{k} = 0 \Rightarrow \frac{n}{k} = \frac{a}{b}\frac{q}{w}$ eller $n = \frac{a}{b}\frac{q}{w}k$. Setter vi denne sammenhengen inn i bibetingelsen, finner vi:

$$x_0 = A\left[\frac{a}{b}\frac{q}{w}k\right]^a k^b = A\left(\frac{a}{b}\right)^a\left(\frac{q}{w}\right)^a k^{a+b} = A\left(\frac{a}{b}\right)^a\left(\frac{q}{w}\right)^a k^{\varepsilon} \Rightarrow k = \left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{aq}{bw}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}}$$
$$= \left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{bw}{aq}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}} = k(x_0, \frac{w}{q})$$

der vi har den betingede etterspørselsfunksjon for kapital – betinget av gitt produktmengde. Da følger den betingede etterspørelen etter arbeidskraft fra $n = \frac{a}{b}\frac{q}{w}k$. Vi har da

$$n(x_0, \frac{w}{q}) = \frac{a}{b}\frac{q}{w}k(x_0, \frac{w}{q}) = \frac{a}{b}\frac{q}{w}\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{aq}{bw}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}} = \left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}+1}\left(\frac{q}{w}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}+1}$$
$$= \left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a+a+b}{\varepsilon}}\left(\frac{q}{w}\right)^{\frac{-a+a+b}{\varepsilon}} = \left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{aq}{bw}\right)^{\frac{b}{\varepsilon}}$$

Da følger kostnadsfunksjonen som:

$$C(x_0, w, q) = wn(x_0, \frac{w}{q}) + qk(x_0, \frac{w}{q})$$
$$= w\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{aq}{bw}\right)^{\frac{b}{\varepsilon}} + q\left(\frac{x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{bw}{aq}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}} = (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{-\frac{b}{\varepsilon}+1} + (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}q^{-\frac{a}{\varepsilon}+1}$$
$$= (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}\right] = (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b}{\varepsilon}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\right]$$
$$= (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\cdot\left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b}{\varepsilon}-\frac{a}{\varepsilon}}\right\} = (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right\}$$
$$= (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\left\{1 + \frac{a}{b}\right\} = (x_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{\varepsilon}{b}\right)$$

Definer nå: $\Phi(w,q)=A^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{\frac{b}{\varepsilon}}w^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{\varepsilon}}\left(\frac{\varepsilon}{b}\right)$, slik at for en vilkårlig gitt verdi på $x$, kan

kostnadsfunksjonen skrives som: $C(x,w,q)=\Phi(w,q)\cdot x^{\frac{1}{\varepsilon}}$, fra hvilken vi kan utlede gjennomsnitts- og grensekostnad:

Grensekostnaden: $C'_x=\dfrac{dC}{dx}=\dfrac{1}{\varepsilon}\Phi(w,q)x^{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ og $C''_{xx}=\dfrac{1}{\varepsilon}(\dfrac{1}{\varepsilon}-1)\Phi(w,q)x^{\frac{1}{\varepsilon}-2}$

Gjennomsnittskostnad: $\overline{C}(x,w,q)=\dfrac{C(x,w,q)}{x}=\Phi(w,q)x^{\frac{1}{\varepsilon}-1}$

Dermed har vi: $\overline{C}=\varepsilon C'_x$, med $\begin{cases}\overline{C}>C'_x\ hvis\ \varepsilon>1\ og\ C''_{xx}<0\ med\ \frac{d\overline{C}}{dx}<0\\ \overline{C}=C'_x\ hvis\ \varepsilon=1\ og\ C''_{xx}=0\ med\ \frac{d\overline{C}}{dx}=0\\ \overline{C}<C'_x\ hvis\ \varepsilon<1\ og\ C''_{xx}>0\ med\ \frac{d\overline{C}}{dx}>0\end{cases}$

v) Anta at $a+b<1$. Fastlegg betingelser for profittmaksimering og utled faktoretterspørselsfunksjoner og produktilbudsfunksjonen. Hvordan varierer denne tilpasningen når:

- Produktprisen øker
- En faktorpris øker
- Begge faktorpriser øker proporsjonalt
- En faktorpris og produktpris øker prosentvis like mye
- Alle priser øker med 10 %

**Svar:**

Profittmaksimering avledes nå av: $Max_{(n,k)}\left\{\pi(n,k)=pAn^ak^b-wn-qk\right\}$

Løsningen må oppfylle:

$$\frac{\partial\pi}{\partial n}=pa\frac{x}{n}-w=0\Rightarrow n=\frac{apx}{w}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial k}=pb\frac{x}{k}-q=0\Rightarrow k=\frac{bpx}{q}$$

Setter vi disse inn i produktfunksjonen, finner vi tilbudsfunksjonen fra:

$x=A\left[\dfrac{apx}{w}\right]^a\left[\dfrac{bpx}{q}\right]^b=Aa^ab^bp^{a+b}w^{-a}q^{-b}x^{a+b}=Aa^ab^bp^{\varepsilon}w^{-a}q^{-b}x^{\varepsilon}$. Løser vi denne for produsert (lik tilbudt kvantum), finner vi:

$x^{1-\varepsilon}=Aa^ab^bp^{\varepsilon}w^{-a}q^{-b}\Rightarrow x(p,w,q)=\left[Aa^ab^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}}q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}}$. Setter vi denne inn

$n=\dfrac{apx}{w}$, finner vi ubetinget etterspørsel etter arbeidskraft som:

$$n(p,w,q) = apw^{-1}x = apw^{-1}\left[Aa^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = A^{\frac{1}{1-\varepsilon}} a^{1+\frac{a}{1-\varepsilon}} b^{\frac{b}{1-\varepsilon}} p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+1} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}-1}$$
$$\left[Ab^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{\frac{-a-1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = \left[Ab^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}}$$

Tilsvarende kan vi da finne den ubetingede etterspørsel etter kapital som:

$$k(p,w,q) = \frac{bp}{q} x(p,w,q) = \left[Aa^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}}$$

**Økt produktpris:** Finner ved å elastisitere

$$El_p x(p,w,q) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > 0 \text{ når } a+b=\varepsilon<1$$

$$El_p n(p,w,q) = \frac{1}{1-\varepsilon} = El_p k(p,w,q) > 0$$

**Økt lønn:** Igjen ved å elastisitere

$$El_w x(p,w,q) = -\frac{a}{1-\varepsilon} = El_w k(p,w,q) < 0$$

$$El_w n(p,w,q) = -\frac{1-b}{1-\varepsilon} < 0$$

**Proporsjonal økning (eller t-dobling med t>1) i faktorprisene:**

$$x(p,tw,tq) = \left[Aa^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{-\frac{a}{1-\varepsilon}-\frac{b}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^{-1}x(p,w,q) = \frac{1}{t}x(p,w,q)$$

som betyr at $x(p,w,q) = tx(p,tw,tq) > x(p,tw,tq)$ siden $t>1$. Tilbudt kvantum går ned.

$$n(p,tw,tq) = \left[Ab^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{b-1-b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = t^{\frac{-1}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = \frac{1}{t^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} n(p,w,q)$$

som betyr at $n(p,w,q) = t^{\frac{1}{1-\varepsilon}} n(p,tw,tq) > n(p,tw,tq)$. Bruk av arbeidskraft går ned.

Fordi vi fra førsteordenbetingelsene for et profittmaksimum har $\frac{k}{n} = \frac{b}{a}\frac{w}{q}$, må da selvsagt *k* gå like mye ned som *n* gjør når faktorprisene øker proporsjonalt.

**Produktpris og lønn øker proporsjonalt**

$$x(tp,tw,q) = \left[Aa^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{a}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) > x(p,w,q)$$

fordi $t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} > t^0 = 1$. Tilbudt kvantum går opp.

$$n(tp,tw,q) = \left[Ab^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1}{1-\varepsilon}-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) > n(p,w,q)$$

$$k(tp,tw,q) = \left[Aa^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-a}{1-\varepsilon}} k(p,w,q) > k(p,w,q)$$

**Alle priser øker proporsjonalt**

$$x(tp,tw,tq) = \left[Aa^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{\varepsilon-a-b}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^0 x(p,w,q) = x(p,w,q)$$

$$n(tp,tw,tq) = \left[A\,b^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-1+b-b}{1-\varepsilon}} nm(p,w,q) = t^0 n(p,w,q) = n(p,w,q)$$

$$k(tp,tw,tq) = \left[A\,a^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-a-1+a}{1-\varepsilon}} k(p,w,q) = t^0 k(p,w,q)$$

Når alle priser varierer proporsjonalt, skjer det ingen endring i den profittmaksimerende tilpasningen.

vi) Hvordan påvirkes "bildet" om vi skulle ha $a + b = 1$? Profittmaksimering er da ikke veldefinert.