ECON 2200 – våren 2013
Jon Vislie

ECON 2200 – våren 2013:
Veiledning til oppgave 4 plenumsøvelse den 10. april

En bedrift produserer en vare i mengde x med produktfunksjonen $x = n^a k^b$, der n er bruk av arbeidskraft og k er realkapital. Bedriften opptrer som prisfast kvantumstilpasser i alle de markedene den opererer. Det antas at $a + b < 1$, og begge positive.

Vi skal utlede betingelser for maksimum av $\pi(n,k) = pn^a k^b - wn - qk$.
Vi leter opp førsteordensbetingelsene til problemet

$$Max_{(n,k)} \left\{ \pi(n,k) = pn^a k^b - wn - qk \right\}$$

En indre løsning må oppfylle:

$$\frac{\partial \pi}{\partial n} = apn^{a-1}k^b - w = pa\frac{x}{n} - w = 0 \Rightarrow n = \frac{apx}{w} \text{ og}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = bpn^a k^{b-1} - q = pb\frac{x}{k} - q = 0 \Rightarrow k = \frac{bpx}{q}$$

For å se om 2.ordensbetingelsene for et (lokalt) maksimum er oppfylt, må vi sjekke at $\frac{\partial^2 \pi}{\partial n^2} < 0$ og $D := \frac{\partial^2 \pi}{\partial n^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial k^2} - \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial n \partial k}\right]^2 > 0$. Hvis disse holder, da er det punktet som oppfyller de to førsteordensbetingelsene et lokalt maksimum. Vi finner:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial n^2} = a(a-1)pn^{n-2}k^b = a(a-1)p\frac{x}{n^2} < 0$$

Siden $\frac{\partial^2 \pi}{\partial k^2} = b(b-1)pn^n k^{b-2} = b(b-1)p\frac{x}{k^2}$ og $\frac{\partial^2 \pi}{\partial n \partial k} = abpn^{a-1}k^{b-1} = abp\frac{x}{nk} > 0$, finner vi

$$\begin{aligned} D &= ab(a-1)(b-1)p^2\frac{x^2}{n^2k^2} - a^2b^2p^2\frac{x^2}{n^2k^2} = \frac{x^2}{n^2k^2}p^2ab\Big[(a-1)(b-1) - ab\Big] \\ &= (1-a-b)\frac{x^2}{n^2k^2}p^2ab > 0 \end{aligned}$$

Dermed må stasjonærpunktet være et maksimumspunkt.

Vi kan sette $n = \dfrac{apx}{w}$ og $k = \dfrac{bpx}{q}$ inn i produktfunksjonen som da kan uttrykkes som: $x = \left[\dfrac{apx}{w}\right]^a \cdot \left[\dfrac{bpx}{q}\right]^b = a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{a+b} x^{a+b} \Rightarrow x^{1-a-b} = a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{a+b}$ som gir oss *tilbudsfunksjonen* når vi setter $\varepsilon := a + b$, nemlig:

$x(p,w,q) = \left[a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Setter vi denne inn i våre faktorfunksjoner, avledet fra førsteordensbetingelsene, finner vi:

$n = \dfrac{apx}{w} = a^{1+\frac{a}{1-\varepsilon}} b^{\frac{b}{1-\varepsilon}} p^{1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w^{-1-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{\frac{-b}{1-\varepsilon}} = \left[b^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{\frac{b-1}{1-\varepsilon}} q^{\frac{b}{\varepsilon-1}} = n(p,w,q)$ og på tilsvarende måte: $k = \dfrac{bpx}{q} = \left[a^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} w^{\frac{a}{\varepsilon-1}} q^{\frac{a-1}{1-\varepsilon}} = k(p,w,q)$ som *de ubetingede faktoretterspørselsfunksjonene*.

Vi ser at vi kan skrive $\ln x = \dfrac{1}{1-\varepsilon}\left[\ln(a^a b^b) + \varepsilon \ln p - a \ln w - b \ln k\right]$, slik at

$El_p x = \dfrac{d \ln x}{d \ln p} = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ eller fra

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \left[a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}-1} \cdot \varepsilon p^{\varepsilon-1} \cdot \left(a^a b^b w^{-a} q^{-b}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \underbrace{\left[a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{\varepsilon}\right]^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}_{=x^{\varepsilon}} \varepsilon p^{-1} \cdot \underbrace{\left[a^a b^b w^{-a} q^{-b} p^{\varepsilon}\right]}_{=x^{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{x}{p} \Rightarrow \frac{p}{x} \frac{\partial x}{\partial p} = El_p x = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > 0$$

På tilsvarende måte kan vi da finne:

$$El_p n = \frac{1}{1-\varepsilon} = El_p k > 0.$$

Økt lønn:

$$El_w x = -\frac{a}{1-\varepsilon} < 0,\ El_w n = \frac{b-1}{1-\varepsilon} < 0,\ El_w k = \frac{a}{\varepsilon - 1} < 0$$

w og q øker proporsjonalt; begge multipliseres med faktoren $t > 1$ (ekvivalent med at p går ned):

$$x(p,tw,tq) = \left[a^a b^b (tw)^{-a} (tq)^{-b} p^{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \left(t^{-(a+b)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^{-1} x(p,w,q)$$

$$\Rightarrow x(p,w,q) = t x(p,tw,tq) > x(p,tw,tq) \quad \textit{siden } t > 1$$

Tilbudt kvantum går ned.

Videre finner vi:

$$n(p,tw,tq) = \left[b^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} p^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{b-1-b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = t^{\frac{-1}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = \frac{1}{t^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} n(p,w,q)$$

som betyr at $n(p,w,q) = t^{\frac{1}{1-\varepsilon}} n(p,tw,tq) > n(p,tw,tq)$ siden $t > 1$ og $\dfrac{1}{1-\varepsilon} > 1$.

Bruk av arbeidskraft går derfor ned.

Fordi vi fra førsteordenbetingelsene for et profittmaksimum har $\dfrac{k}{n} = \dfrac{b}{a}\dfrac{w}{q}$, må da selvsagt *k* gå like mye ned som *n* gjør når faktorprisene øker proporsjonalt.

Produktpris og lønn øker proporsjonalt

$x(tp,tw,q) = \left[a^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{a}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) > x(p,w,q)$ fordi $t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} > t^0 = 1$. Tilbudt kvantum går opp.

$$n(tp,tw,q) = \left[b^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1}{1-\varepsilon}-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = t^{\frac{b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) > n(p,w,q)$$

$$k(tp,tw,q) = \left[a^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} q^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-a}{1-\varepsilon}} k(p,w,q) > k(p,w,q)$$

Bruken av begge faktorer øker også.

Alle priser øker proporsjonalt

$$x(tp,tw,tq) = \left[a^a b^b\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{\varepsilon-a-b}{1-\varepsilon}} x(p,w,q) = t^0 x(p,w,q) = x(p,w,q)$$

$$n(tp,tw,tq) = \left[b^b a^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{1-b}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{b}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-1+b-b}{1-\varepsilon}} n(p,w,q) = t^0 n(p,w,q) = n(p,w,q)$$

$$k(tp,tw,tq) = \left[a^a b^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tp)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (tw)^{-\frac{a}{1-\varepsilon}} (tq)^{-\frac{1-a}{1-\varepsilon}} = t^{\frac{1-a-1+a}{1-\varepsilon}} k(p,w,q) = t^0 k(p,w,q) = k(p,w,q)$$

Når alle priser varierer proporsjonalt, skjer det ingen endring i den profittmaksimerende tilpasningen.