Oppsummering matematikkdel

ECON 2200

Kjell Arne Brekke

Økonomisk Institutt

May 6, 2013

Innledning

- Rekker bare å nevne noen hovedpunkter
- Alt er likevel pensum, selv om det ikke blir nevnt her! .

- Vi har brukt det hele veien
- Ikke tid til en oppsummering her
- Er du usikker?:

$$
\begin{aligned}
(c+k)y &= cy+ky \\
&\frac{2}{x+2} \text{ korte bort 2?} \\
p(1-t)-ky &= 0 \text{ løs for } y
\end{aligned}
$$

Derivasjon

- Definisjon.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ grenseverdien når } h \text{ går mot } 0$$

- Tolkning, ofte er $h = 1$ lite nok, og det kan tolkes som verdien av den siste/neste enheten

$$f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$$

- Fundamentale derivasjonsregler. Kan du derivere

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

og finne

$$f'(x) = 6x + 2 \quad ?$$

Litt mer komplekse derivasjonsregler

- Tre regler

$$\begin{aligned}
\text{Produkt} &: \quad F(x) = f(x)g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\text{Brøk} &: \quad F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
\text{Kjerneregel} &: \quad F(x) = f(g(x)) \Longrightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

- Eksempel 1

$$F(y) = p(y)y$$

her bruker vi produktregelen (Tenk på det som $f(y)g(y)$ der $f(y) = p(y)$ og $g(y) = y$).

$$F'(y) = p'(y)y + p(y)$$

Litt mer komplekse derivasjonsregler, II

- Eksempel 2:

$$F(x) = \frac{\ln x}{x}$$

gir ved brøkregelen

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

- Eksempel 3

$$F(x) = e^{x^2} = f(g(x))$$

der

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u \\ u &= g(x) = x^2 \end{aligned}$$

Som gir

$$F'(x) = f'(u)g'(x) = e^u 2x = 2xe^{x^2}$$

Flervariabelanalyse

- Partiell derivert

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h}$$

- Deriverer med hensyn på x, tenk på y som en konstant

$$F(x,y) = x^2 y \text{ gir } F'_x(x,y) = 2xy$$

- Kjerneregelen

$$z = F(x,y) \text{ der } x = f(t,s) \text{ og } y = g(t,s)$$

gir

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x,y) f'_s(t,s) + F'_y(x,y) g'_s(t,s)$$

Andrederivert

- Eksempel $g(x) = 3x^2$

$$g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

Deriverer en gang til

$$g''(x) = 6$$

- Positiv $\rightarrow$ smilemunn: $g'' > 0$ betyr at funksjonen er konveks, den kummer oppover og et stasjonærpunkt er en minimum.
- Negativ $\rightarrow$ surmunn: $g'' < 0$ betyr at funksjonen er konkav og krummer nedover og et stasjonærpunkt er en maksimum.

Elastisiteter

- Eksempel $g(x) = 3x^2$

$$\frac{g'(x)x}{g(x)} = \frac{dg}{dx}\frac{x}{g} = \frac{6x \cdot x}{3x^2} = 2$$

- Tolkning: Den prosentvise endring i g ved en prosents endring i x.
- Om det gjør det klarere for noen:

$$\frac{dg}{dx}\frac{x}{g} = \left(\frac{dg}{g}\right) / \left(\frac{dx}{x}\right)$$

Maksimering (minimering tilsvarende)

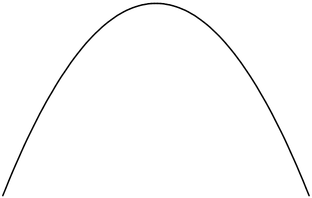
- Finner stasjonærpunkt

$$f'(c) = 0$$

- Er et maksimum om

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{for } x < c \\ < 0 & \text{for } x > c \end{cases}$$

- Illustrasjon:



Maksimering fortsatt

- Er minimum om
$$f'(x)\begin{cases} < 0 & \text{for } x < c \\ > 0 & \text{for } x > c \end{cases}.$$
- Men selv om $f'(c) = 0$, trenger det ikke være min/maks

Andreordensbetingelser

- $f''(x) > 0$ for alle x tilsier minimum
- $f''(x) < 0$ for alle x tilsier maksimum
- Merk at andreordenbetingelsen skal gjelde overalt. .

Implisitt derivasjon

- Noen funksjoner er implisitt definert gjennom en ligning

$$g(f(x), x) = 0$$

- I økonomi er ligningen gjerne en 1. ordens betingelse ($\max_x pf(x) - cx$).

$$pf'(x^*(c)) = c$$

en markedslikevekt

$$D(p(t)) = S(p(t) - t)$$

eller en nivåkurve

$$f(k(n), n) = x_0$$

Implisitt derivasjon (eksempel)

- 1.ordensbetingelsen

$$pf'(x^*(c)) = c$$

- Deriver ligningen mhp argumentet. Her er x en funksjon av c, så vi deriverer m.h.p. c:

$$\begin{aligned} pf''(x^*)x^{*\prime}(c) &= 1 \\ x^{*\prime}(c) &= \frac{1}{pf''(x^*)} < 0 \end{aligned}$$

- Fortegnet bestemmes gjerne av andreordensbetingelsen
- Når vi spør om effekten på en variabel som ikke er er bestemt av ligningen, sett inn.
- F.eks.: Hvordan påvirkes produsert kvantum av en endring i c?

$$\begin{aligned} y &= f(x^*) \\ \frac{dy}{dc} &= f'(x)x^{*\prime}(c) \end{aligned}$$

Differensialer

- Differensialer

$$\begin{aligned} & u(x, y) \\ du &= u'_x dx + u'_y dy \end{aligned}$$

- Kan brukes til implisitt derivasjon: $y(x)$ gitt ved

$$u(x, y(x)) = u_0$$

betyr at

$$du = 0$$

gir

$$0 = u'_x dx + u'_y dy$$

som løses til

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_x}{u'_y}$$

Maksimering med to variabler

- Søker fortsatt etter stasjonærpunkter:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ og } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

- Tilstrekkelige begingelser for maksimum

$$f''_{xx}(x, y) \leq 0;\ f''_{yy}(x, y) \leq 0 \text{ og i tillegg } f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

- Tilstrekkelig for minimum

$$f''_{xx}(x, y) \geq 0;\ f''_{yy}(x, y) \geq 0 \text{ og i tillegg } f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

- Merk at i vi ofte også vil kreve at det bare er en løsning. Da trenger vi sterke ulikheter

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &< 0;\ f''_{yy}(x, y) < 0 \text{ for maksimum} \\ f''_{xx}(x, y) &> 0;\ f''_{yy}(x, y) > 0 \text{ for minimum} \\ f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 &> 0 \text{ i begge tilfeller} \end{aligned}$$

- Andreordensbetingelser gjelder overalt (ikke bare i (x_0, y_0))

Maksimering med bibetingelser; Lagrange-metoden

- Maksimeringsproblemet:

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

$$\text{s.t. } g(x,y) = 0$$

- Gir i Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

- Finn stasjonærpunktene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 0 \end{aligned}$$

- Tre ligninger og tre ukjente (x, y, λ)

Maksimering med bibetingelser; Lagrange-metoden

- Eksempel: nytte-maksimering

$$\max_{x,y} u(x,y) \text{ under bibetingelsen. } px + qy - m = 0$$

- gir Lagrangfunksjonen

$$\mathcal{L} = u(x,y) - \lambda\,(\ px + qy - m)$$

- Stasjonærpunkter:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= u'_x - \lambda p = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= u'_y - \lambda q = 0 \end{aligned}$$

- Kan løses videre til:

$$\lambda = \frac{u'_x}{p} = \frac{u'_y}{q} \text{ som også gir } \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{p}{q}.$$

- Kombiner denne ligningen med budsjettbetingelsen for å finne $x(p,q,m)$ og $y(p,q,m)$.

Omhylningsteoremet uten bibetingelse

Funksjonen $f^*(r)$ er definert som et maksimum

$$f^*(r) = \max_x f(x, r) = f(x^*(r), r) \text{ (eller } f^*(r) = \min_x f(x, r))$$

Her vil den optimale x avhenge av r, men når vi skal derivere $f^*(r)$ sier omhylningsteoremet at vi kan ignorere effekten r har på x:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r}(x^*(r), r)$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \frac{df^*(r)}{dr} &= \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx^*}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r} + 0\frac{dx^*}{dr} \\ \text{Fordi } \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \text{ som er førsteordensbetingelsen.} \end{aligned}$$

Omhylningsteoremet med bibetingelse

Funksjonen $f^*(r)$ er definert som et maksimum (eller minimum) med bibetingelser

$$f^*(r,s) = \max_{x,y} f(x,y,r,s) \text{ under bibetingelsen } g(x,y,r,s) = 0$$

Det gir Lagrangefunksjon

$$\mathcal{L} = f(x,y,r,s) - \lambda g(x,y,r,s)$$

Omhylningsteoremet sier nå

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \text{ og } \frac{\partial f^*}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}$$

Omhylningsteoremet med bibetingelse

Eksempel: Shepards lemma

$$
\begin{aligned}
c(x, w, q) &= \min_{k,n} wn + qk \\
\text{gitt } f(n, k) &= x
\end{aligned}
$$

Lagrangefunksjon

$$
\mathcal{L}(n, k; x, w, q) = wn + qk - \lambda\left(f(n, k) - x\right)
$$

Da er

$$
\begin{aligned}
c'_w &= \mathcal{L}'_w = n \text{ (n er her den optimale arbeidskraft)} \\
c'_q &= \mathcal{L}'_q = k \text{ (k er her den optimale kapital)}
\end{aligned}
$$

Logaritmer og eksponentialfunksjoner

- Vi husker her at

$$e^{\ln x} = x \text{ og tilsvarende } \ln(e^x) = x$$

- e og ln er hendig ved at

$$\begin{aligned} \ln(ax^b) &= \ln a + b \ln x \\ e^{a + b\ln x} &= e^a x^b \end{aligned}$$

  men husk at

$$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$$

- Derivasjonsregelene

$$f(x) = \ln x \quad \text{gir} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

  mens

$$g(x) = e^x \quad \text{gir} \quad g'(x) = e^x$$

Geometriske rekker

- Summen av de n første leddene en geometrisk rekke

$$S_n = a + ak + ak^2 + ... + ak^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} ak^i$$

- Enklere å huske utregning enn formel?
- Gang S_n med k og observer at det meste blir som før

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^n$$

- Bare det første leddet i S_n og det siste i kS_n er spesielle. Når vi ta differansen ser vi da at

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a - ak^n \\ (1-k)S_n &= a(1-k^n) \\ S_n &= a\frac{1-k^n}{1-k} \end{aligned}$$

Geometriske rekker

- Om du sparer 10 000 per år i ti år med 5% rente vil det etter siste innbetaling stå ($a = 10000$, $n = 10$, og $k = 1,05$)
- $$S_n = 10000 \sum_{i=0}^{9} (1,05)^i = 10000 \frac{1 - 1.05^{10}}{1 - 1.05} = 125780$$

Til eksamen

- Pust dypt og rolig før du leser oppgaven
  - En 20 sek. klem øker oxytocin-nivået.
- Svar på det du blir spurt om
  - Ikke begynne å svare på det du tror vi spør om uten å lese oppgaven ferdig.
- Disponer tida og sørg for at du rekker de oppgavene du kan løse.
  - Ikke bruk opp tida på et delspørsmål hvor du står fast
- Husk at det er et regnekurs.
  - Figurer er flott
  - Men svar med regning når vi spør om det.
- Si fra hvor du går
  - Ikke bare regning uten ord - ingen vet om du har tenkt riktigt men regnet galt.
  - Hva sier figuren
- *Lykke til!!*