Universitetet i Oslo
Økonomisk Insitutt
Kjell Arne Brekke, Rom 1032

ECON2200 - Matematikk 1, Våren 2013
Oppgaver til fjerde seminar; uke 9.

Oppgave 1

La

$$f(x, y) = (4 + x + y)(2x + y)$$

Finn et stasjonærpunkt til *f*, og avgjør om det er et maksimum, minimum eller ingen av delene.

Oppgave 2

La

$$f(x, y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - q(x + y) \text{ for } x, y \geq 0$$

være profitten til en konsern som har to bedrifter som begge produserer med samme innstatsfaktor, der *x* er bruken av innsatsfaktoren i den ene bedriften og *y* er bruken i den andre. *q* er en prisen på innsatsfaktoren, og er positiv.

a) Finn et stasjonærpunkt til *f*, og avgjør om det er et maksimum, minimum eller ingen av delene.
b) Finn den prisen *q* som gjør at konsernet totalt vil bruke *45* enheter av innsatsfaktoren.

Anta nå at bedriften har akkurat 45 enheter av innsatsfaktoren tilgjengelig og at det ikke er mulig å kjøpe flere (eller selge det overskytende). Profitten blir da:

$$g(x, y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

c) Maksimer g(x,y) under bibetingelsen $x+y=45$ ved hjelp av Lagranges metode.

Legg merke til at når bedriften bare har 45 enheter, må $y = 45 - x$ og kravet for $x,y \geq 0$ blir nå: $0 \leq x \leq 45$. Profitten kan nå skrives som en funksjon av *x*:

$$h(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{45 - x}$$

d) Finn eventuelle indre stasjonærpunkter for denne funksjonen og avgjør om det er et maksimum eller minimum.
e) Sammenligne svarene i b), c) og d).

Oppgave 3

Bruk Lagranges metode til å løse det betingede minimeringsproblemet

$\min 2x + y$ under bibetingelsen $x^2 y = 8$. Vi forutsetter at både x og y er positive.

a) Sett opp Lagrangefunksjonen.

b) Vis utfra de to førsteordensbetingelsene som karakteriserer stasjonærpunktene i Lagrangefunskjonen at x=y.

c) Bruk resultatet i b) samt bibetingelsen til å finne den optimale løsningen.

d) Prøv å tegne bibetingelsen $x^2 y = 8$ og nivåkurvene til 2x+y i samme diagram, for eksempel 2x+y=4, 2x+y=6, og 2x+y=8.

Oppgave 4

En bedrift maksimerer profitten ved å velge kvantum produsert $x \geq 0$. Produktprisen er p>0, og kostnadene er $c(x) = x^2$. Prodsenten maksimerer da

$$px - x^2$$

La $x^*(p)$ være optimalt kvantum for en gitt pris p, og $\pi(p)$ være bedriftens optimal kvantum ved prisen p.

a) Dersom prisen er p=100. Hva er optimalt kvantum $x^*(100)$ og hva blir bedriftens profitt $\pi(100)$ når den produserer det optimale kvantumet?

b) Dersom prisen øker med en krone til p=101. Hvordan endres optimalt kvantum $x^*(100)$ og bedriftens profitt $\pi(100)$?

c) Hva ville bedriftens profitt vært om den ikke endret sitt kvantum når prisen økte med en krone? (Altså hva ville profitten vært med p=101 og kvantum som i a).

d) Forklar hvordan du kunne funnet endringen i bedriftens profitt fra a) til b) uten å løse profittmaksimeringsproblemet i b). Hint: bruke omhylningssetningen og merk at

$$\pi(p) = \max_x px - x^2$$