University of Oslo / Department of Economics / Nils Framstad, denne versjonen: 5. februar 2014

Plenumsregning 3: Optimalisering.

Oppgave 3.1 Maksimer følgende funksjoner

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} - x \qquad \text{for } x \geq 0 \\
g(x) &= 10 - 3x \qquad \text{for } x \geq 0 \\
h(x) &= 18x - x^2
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.2 Et sykehus fordeler et budsjett M på to aktiviteter. De rangerer ventelisten innen hver aktivitet etter hvilken helsegevinst behandlingen har for pasientene, og de behandler de pasientene først som har størst helsegevinst. La $f(x)$ være helsegevinsten om x pasienter behandles med metode 1 og $g(x)$ være total helsegevinst om x behandles med metode 2.

(a) Hva kan du si om $f''(x)$ og $g''(x)$?

(b) Er det rimelig her å betrakte x som kontinuerlig (dvs. at x kan være et vilkï¿½rlig reelt tall)?

Prisen per pasient med metode 1 er p og for metode 2 er den q.

(c) Hva blir helsegevinsten av 1 krone ekstra til hhv. metode 1 og metode 2?

Sykehuset ønsker å fordele ressursene for å få størst mulig helsegevinst av budsjettet M.

(d) Sett dette opp som et maksimeringsproblem og finn førsteordensbetingelsen.
Kan du tolke denne betingelsen?

(e) Kan vi være sikre på at førsteordensbetingelsen gir oss et maksimum?

Oppgave 3.3

(a) Finn stasjonærpunktene til funksjonen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

(b) Er disse punktene lokale maksimum eller minimum?

(c) Er de globale optima?

Oppgave 3.4 En bedrift produserer en vare med konstante enhetskostnader, dvs. hver enhet koster c kroner. Prisen på produktet er p, så profittfunksjonen er

$$\pi(x) = px - cx \text{ for } x \geq 0$$

(a) Hva er profittmaksimerende kvantum x?

(b) Er profittfunksjonen konkav?

(c) Er profittfunksjonen strengt konkav?

Oppgave 3.5 I denne oppgaven skal vi maksimere funksjonen

$$f(x) = u(x) + m - px \text{ for } x \geq 0 \text{ og } px \leq m$$

der nyttefunksjonen u er konkav og ikke-avtagende, og m og p er positive parametre.

(a) Anta først at løsningen er en indre løsning (dvs. $x > 0$ og $px < m$). Finn førsteordensbetingelsen.

(b) Er andreordensbetingelsen oppfylt?

Til slutt skal du sjekke om vi har en hjørneløsning.

(c) Under hvilke betingelser vil $x = 0$ løse problemet?

(d) Under hvilke betingerlser vil $px = m$ løse problemet?

Oppgave 3.6 (a)–(d) Finn de partiellderiverte (av fï¿½rste orden) til følgende funksjoner:

(a) $f(x, y) = 3xy$ (b) $f(x, y) = x + 3y$ (c) $f(x, y) = x - xy + y$ (d) $f(x, y) = y$

(e)–(h) Uttrykk de partiellderiverte (av fï¿½rste orden) av $F(x, y)$ ved hjelp av $f'(x)$ og $g'(y)$ for følgende funksjoner:

(e) $F(x, y) = f(x)g(y)$ (f) $F(x, y) = f(x) - g(y)$ (g) $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$ (h) $F(x, y) = f(x)$