Jon Vislie; april 2014
ECON 2200 – våren 2014

Prosedyre for løsning av oppgaver

Jeg skal ved hjelp av to oppgaver; én i produksjonsteori og én i konsumentteori, gi noen forslag til prosedyre/hjelp/veivalg til å løse oppgaver i ECON 2200. Det er tre typer av spørsmål jeg tror mange stiller seg: «Hva er problemet; hvor skal jeg starte?», «Hvordan skal jeg gå fram?» og «Hvorfor skal jeg gjøre det akkurat sånn?». Dette notatet er kun ment som en støtte til den mer generelle teorien som er presentert i Strøm & Vislie – det kan på ingen måte erstatte den grunnleggende teorien. Oppgaver vil (nesten) alltid være spesialtilfeller av mer generelle modeller. (Det kan også være nyttig å studere de veiledningene som er laget fra de to plenumsøvelsene; der er det én produksjonsteorioppgave (oppgave 1, plenum 12.mars), og en kombinert konsument- og produksjonsteorioppgave (oppgave 1, plenum 26.mars.)

Problem 1: Produsenttilpasning

La oss først se på en oppgave som skulle ha vært løst tidligere, nemlig følgende: Vi betrakter en bedrift som har en produktfunksjon $x = F(N)$ der $F(N) = \sqrt{N} = N^{\frac{1}{2}}$ som er strengt voksende og strengt konkav, med $F(0) = 0$. Vi kan tenke oss, i første omgang, at N er et mål på bruk av arbeidskraft (antall ansatte) og x er produsert mengde per tidsenhet.

Spørsmål: Angi egenskaper til denne produktfunksjonen.

Sentrale begreper som kjennetegner en produktfunksjon er gjennomsnitts – og grenseproduktivitet. Disse begrepene må en kjenne til! For denne produktfunksjonen har vi at grenseproduktiviteten er $F'(N) = \frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}$ og gjennomsnittsproduktiviteten er $\frac{x}{N} = N^{-\frac{1}{2}}$. Vi ser at $\frac{x}{N} = 2F'(N) > F'(N)$. Videre har vi produktakselerasjonen

$F''(N) = -\frac{1}{4}N^{-\frac{3}{2}} < 0$. (Siden grenseproduktiviteten er mindre enn gjennomsnittsproduktiviteten, vil vi vente (vite?) at $\frac{x}{N}$ er synkende med N.

Sett nå at vi skulle besvare en oppgave om hvordan gjennomsnittsproduktiviteten varierer med innsatsfaktoren. Da må vi se hvordan $\frac{x}{N} = \frac{F(N)}{N} = N^{-\frac{1}{2}}$ selv varierer med N. Deriver da $N^{-\frac{1}{2}}$ med hensyn på N, hvilket gir $\frac{d}{dN}(N^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}N^{-\frac{3}{2}} < 0$. Gjennomsnittsproduktiviteten er overalt fallende i bruken av arbeidskraft. Et tredje kjennetegn er gitt ved grenseelastisiteten; dvs. $El_N F(N) = \frac{N}{F(N)}F'(N) = \frac{F'(N)}{\frac{x}{N}} = \frac{1}{2}$.

Neste spørsmål: Utled kostnadsfunksjonen, med tilhørende grense – og gjennomsnittskostnad. Hvordan varierer gjennomsnittskostnaden med produsert kvantum?

Vi skal da fram til en sammenheng mellom (minste) samlet faktorutlegg og produsert kvantum av ferdigvaren. (Med flere produksjonsfaktorer må en velge den faktorkombinasjon på en gitt isokvant som gir lavest samlet faktorutlegg. Her er det kun én produksjonsfaktor.) Vi skal anta at bedriften ønsker å maksimere overskuddet, og derfor vil den ikke sløse med bruk av arbeidskraft. Det betyr at om den skal produsere en (foreløpig vilkårlig) mengde x av ferdigvaren, vil den ikke bruke mer arbeidskraft enn nødvendig. Dermed vil, om den skal produsere x enheter (innenfor den perioden vi ser på; f.eks. en uke) av ferdigvaren, vil den ikke bruke mer enn $\sqrt{N}$ enheter arbeidskraft. Vi finner da, fra produktfunksjonen, nødvendig innsats av arbeidskraft per uke ved å produsere x enheter av ferdigvaren over en uke. Invertering av produktfunksjonen gir da $X = \sqrt{N} \Rightarrow N = x^2$. Om hver enhet arbeidskraft koster bedriften W kroner per uke (denne lønna tar bedriften som en eksogent, gitt størrelse), vil kostnadsfunksjonen for å produsere x enheter per uke, i kroner, være $C(x;W) = Wx^2$. (Husk at kostnadsfunksjonen viser sammenhengen mellom minste faktorutlegg – i kroner – for enhver gitt produktmengde.) Denne har følgende egenskaper:

$C(0;W)=0, \dfrac{dC(x;W)}{dx}=2Wx, \dfrac{C(x;W)}{x}=Wx<\dfrac{dC}{dc}$, og med $\dfrac{d^2C}{dx^2}=2W$.

Grensekostnaden er stigende og større enn gjennomsnittskostnaden som selv er stigende i produsert kvantum. Vi ser jo at Wx stiger med produsert kvantum.

Spørsmål: Hvor mye vil bedriften ønske å produsere om målet er profittmaksimering?

Den kostnadsfunksjonen vi har utledet skal nå brukes til å bestemme hvor mye bedriften vil ønske å produsere av ferdigvaren om overskuddet per uke skal maksimeres. Ved utledningen av kostnadsfunksjonen var x vilkårlig – nå skal den bestemmes eller avledes fra et overskuddsmål. Under selve profittmaksimeringen er produsert kvantum da en *endogen* variabel.

La hver enhet av ferdigvaren selges til en (gitt) pris p på et marked. Da kan vi utlede et uttrykk for bedriftens overskudd – målt i kroner per uke – som en funksjon av x:

$\pi(x;p,W)=px-C(x;W)=px-Wx^2=x\left[p-Wx\right]$. Her er x den variabel bedriften selv skal fastlegge, mens prisene (p,W) er eksogent gitte størrelser. Bedriftens mål er nå: Velg $x\geq 0$ slik at $\pi(x;p,W)$ maksimeres.

Da bruker vi matematikken og leter etter et maksimum. For det første, ser vi at $\pi\geq 0$ for alle $0\leq x\leq \dfrac{p}{W}$. Det vil derfor aldri være lønnsomt å produsere utover $\dfrac{p}{W}$ enheter av produktet per uke. (Mens p har benevning kroner per enhet av x, vil W være lønn per ansatt per uke; der «hver ansatt svarer til kvadratet av x».)

Vi ser da på den førstederiverte av profitten med hensyn på x. Vi finner:

$\dfrac{d\pi(x;p,W)}{dx}:=\pi_x(x;p,W)=p-2Wx$, slik at $\pi_x(0;p,W)=p>0$ og

$\pi_x(\dfrac{p}{W};p,W)=p-2p=-p<0$. Fordi $\pi(x;p,W)$ er en kontinuerlig funksjon av x på det lukkede intervallet $\left[0,\dfrac{p}{W}\right]$, vil den ha et maksimum (og et minimum). Vi er på jakt etter et maksimum. Fordi vi har at $\pi_x(0;p,W)>0$ og $\pi_x(\dfrac{p}{W};p,W)<0$, samtidig som $\pi_{xx}(x;p,W) = -2W < 0$, vil $\pi(x;p,W)$ ha et entydig globalt maksimum i det indre av det området der profitten er ikke-negativ; dvs. for en $x = x^* \in (0,\frac{p}{W})$ der $\pi_x(x^*;p,W) = p - 2Wx^* = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{p}{2W}$. Videre har vi at profitten selv er positiv for denne produktmengden siden $\pi(x^*;p,W) = \frac{p}{2W}\left[p - W\frac{p}{2W}\right] = \frac{p}{2W}\frac{p}{2} = \frac{p^2}{4W} > 0$. (Her kan vi også bruke førstederivert-testen; π er voksende (avtakende) til venstre (høyre) for x^*.)

Neste spørsmål: Hvordan påvirkes tilpasningen av en økning i $\frac{p}{W}$? Det er vanlig å spørre hvordan bedriften reagerer på «sjokk» eller prisendringer. Vi skal nå se hvordan bedriften vil endre tilpasning om «realprisen» $\frac{p}{W}$ øker eller at produktprisen øker mer enn lønna per ansatt per uke. Vi trenger ikke «regne» så mye nå, siden vi ser at tilbudt kvantum $x^* = \frac{p}{2W}$ da vil øke. Da må selvsagt også etterspørsel eller bruk av arbeidskraft per uke øke.

Utvidelse:

For å få litt mer analyse skal vi nå anta en noe mer generell produktfunksjon, nemlig $x = AF(hn)$, der x er produktmengden per uke, A en produktivitetsparameter, n antall ansatte og h arbeidstid per ansatt per uke; slik at hn er antall timeverk per uke. Funksjonen F er to ganger kontinuerlig deriverbar, med $F(0) = 0,\ F' > 0\ og\ F'' < 0$. (Alle størrelser varierer kontinuerlig.)

Anta at arbeidstiden er konstant og la hver ansatt ha en *lønn per time*, gitt ved w kroner. Det ferdige produktet kan selges til en gitt pris p kroner per enhet.

Spørsmål: Hvor mange ansatte vil bedriften velge å ha når den ønsker maksimalt overskudd?

Vi ser på profitt per uke; $\pi(n;p,w,h,A) = pAF(hn) - whn$. Nå går vi direkte på profitten som en funksjon av antall ansatte. Bedriftens beslutningsvariabel er antall ansatte, n . Deriver profitten med hensyn på n :

$$\frac{d\pi}{dn} = pAF'(hn) \cdot h - wh = h\left[pAF'(hn) - w\right]$$

La oss anta at $pAF'(0) > w$ og at $pAF'(hn) \to \varepsilon < w$ bare n blir tilstrekkelig stor. (Hvis vi hadde hatt $pAF'(0) < w$ og $F'' < 0$, ville drift ikke være lønnsomt. Hvorfor?)

Med våre antakelser vil det, fordi $F'' < 0$, finnes en entydig positiv verdi på antall ansatte, n^* , som maksimerer overskuddet per uke og bestemt ved førsteordensbetingelsen: $pAF'(hn^*) = w$. (Med våre antakelser er andreordensbetingelsen for et maksimum oppfylt. Her er det imidlertid igjen nok å bruke førsteordenstesten for å avgjøre om vi har et maksimum.) Vår tilpasningsbetingelse sier at merinntekten per uke, $pAF'(hn) \cdot h$, av å ansette ytterligere en marginal arbeidstaker som arbeider h timer, akkurat motsvares av merkostnaden av et ukesverk, nemlig wh . (Alternativt kan vi se på $pAF'(hn)$ som merinntekten per timeverk, som skal balanseres mot timelønna.)

Vi kan nå (i det minste) stille fire spørsmål:

- Hvordan påvirkes bedriftens tilpasning av at arbeidstiden for hver ansatt går ned, for gitt timelønn?
- Hvordan påvirkes svaret i foregående punkt om lønna per uke er uendret?
- Hva skjer med tilpasningen om produktiviteten øker, for gitt timelønn?
- Hva skjer med tilpasningen i foregående punkt om timelønna øker like mye som økningen i A ?

Spørsmål 1: Et slikt spørsmål innebærer at en skal se hvordan en eksogen nedgang i h påvirker tilpasningsbetingelsen. Her kreves det at w holdes fast. Siden tilpasningsbetingelsen skal holde hele tiden (så lenge bedriften produserer med det gitte målet om å maksimere overskuddet per uke), må den også gjelde for nye verdier på de eksogene størrelsene. Vår tilpasningsbetingelse er $pAF'(hn^*) = w$, med w, p, A konstante. Siden denne skal holde, vil en nedgang i h måtte ledsages av en like stor økning i n^*. Med antakelsen om konstant timelønn, må altså $F'(hn^*)$ være uendret.

Spørsmål 2: Arbeidstidsforkortelsen skal nå gå sammen med en lønnskompensasjon slik at ukelønna for hver arbeider er uendret; dvs. når h går ned, skal w øke så mye at wh holdes konstant. Igjen må vi se hvordan tilpasningsbetingelsen påvirkes. La nå $wh := W$ være ukelønn, med tilpasningsbetingelsen for marginale ukeverk gitt som $pAF'(hn^*) \cdot h = W$, der W nå er konstant. Deriver denne tilpasningsbetingelsen med hensyn på h, med W konstant, samtidig som vi tar hensyn til at den endogene variabelen n^*, da normalt påvirkes av en endring i en eksogen variabel. Vi finner da:

$pAF' + pAhF'' \cdot \left[n^* + h\dfrac{\partial n^*}{\partial h}\right] = 0 \Rightarrow \dfrac{h}{n^*}\dfrac{\partial n^*}{\partial h} = -1 - \dfrac{F'}{hn^* F''}$, der siste ledd, $-\dfrac{F'}{hn^* F''}$, er større enn null. Når høyresiden alt i alt er mindre enn null, så betyr det at når h går ned, så vil n^* øke. (De varierer i motsatt retning.) Om uttrykket er positivt, vil h og n^* bevege seg i samme retning; dvs. de går begge ned.

Spørsmål 3: Nå er det A som øker, samtidig som w, p og h holdes uendret. Igjen tar vi utgangspunkt i tilpasningsbetingelsen, $pAF'(hn^*) = w$, og ser nå hvordan n^* påvirkes av en økning i produktiviteten A. Siden w er uendret, må pAF' også holdes uendret når A øker. Da må $F'(hn^*)$ synke tilsvarende og like mye som A øker. Med h uendret, må derfor n^* øke, for at grenseproduktiviteten skal gå ned (husk at $F'' < 0$). At det må være sånn, ser vi ved å derivere gjennom tilpasningsbetingelsen med hensyn på A. Vi finner da

$pF' + pAF'' \cdot h\dfrac{\partial n^*}{\partial A} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial n^*}{\partial A} = -\dfrac{F'}{AhF''} > 0$. Når produktiviteten øker for fastholdt timelønn, vil sysselsettingen (antall ansatte per uke) øke.

Spørsmål 4: Det antas nå at timelønna skal øke like mye som økningen i produktiviteten; dvs. at prosentvis økning i timelønna er lik prosentvis vekst i produktiviteten; $\frac{dw}{w} = \frac{dA}{A}$. Bruk dette i tilpasningsbetingelsen for timeverk, skrevet som $pF'(hn^*) = \frac{w}{A}$. Med lønnskompensasjon lik økningen i produktiviteten, vil høyresiden i denne betingelsen være konstant; da må også venstre side være konstant. Med p og h uendret, må derfor n^* være uendret. Vi ser dette ved å *differensiere* tilpasningsbetingelsen: A øker med dA (som måles som antall produktenheter per uke), w øker med dw kroner per time, mens den endogene endringen i antall ansatte er dn^*:

$pF'dA + pAF''hdn^* = dw \Leftrightarrow pAhF''dn^* = w\frac{dw}{w} - pAF'\frac{dA}{A}$. Bruker vi igjen tilpasningsbetingelsen, ser vi at vi kan skrive dette som:

$pAhF''dn^* = pAF'\frac{dw}{w} - pAF'\frac{dA}{A} = pAF'\left[\frac{dw}{w} - \frac{dA}{A}\right] = 0$ når $\frac{dw}{w} = \frac{dA}{A}$. Da må $dn^* = 0$; dvs. uendret sysselsetting målt etter antall ansatte. Med konstant arbeidstid per uke, er antall ukesverk også uendret.

Problem 2: Konsumenttilpasning

Betrakt en konsument med en nyttefunksjon over to varer gitt ved $U(x,y) = (x-c)^a y^b$ der a,b er positive konstanter, c er et «minstekonsum» av $x-$ varen, med (x,y) som konsumerte mengder av de to varene som kjøpes til (for konsumenten) gitte priser (p,q) kroner per enhet av hhv. x-varen og y-varen. Konsumenten har også en gitt inntekt m. Vi antar at $m > pc$.

Spørsmål: Utled tilpasningen til konsumenten når nyttemaksimering er målet.

Hva er problemet? Jo, problemet er å velge det konsumpar som maksimerer nytten gitt budsjettbetingelsen, gitt ved $px + qy = m$.

Hvordan skal vi løse dette problemet? Vi kan løse det ved Lagranges metode og danner da Lagrangefunksjonen, med λ som Lagrangemultiplikator:

$L(x,y,\lambda) = (x-c)^a y^b - \lambda\left[px + qy - m\right]$.

Vi leter da opp (ved indre løsning; $x > c$) stasjonærpunktene til Lagrangefunksjonen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = a(x-c)^{a-1}y^{b} - \lambda p = 0 \Leftrightarrow a\frac{U}{x-c} - \lambda p = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = b(x-c)^{a}y^{b-1} - \lambda q = 0 \Leftrightarrow b\frac{U}{y} - \lambda q = 0$$

Disse to betingelsene, sammen med budsjettbetingelsen, danner et system av tre likninger mellom tre (endogene) ukjente: x, y, λ, med (p, q, m) som eksogene størrelser. Vi kan eliminere λ, siden vi fra de to førsteordensbetingelsene har: $a\frac{U}{p(x-c)} = b\frac{U}{qy} = \lambda$. Fra den første likheten følger: $\frac{p(x-c)}{qy} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bp(x-c) = aqy$ som vi kan bruke i budsjettbetingelsen for å løse ut for x eller y som funksjoner av priser og inntekt – dvs. etterspørselsfunksjonene.

Tilpasningsbetingelsen gir at $px = pc + \frac{a}{b}qy$, som vi kan bruke i budsjettbetingelsen:

$px + qy = m \Leftrightarrow \frac{a}{b}qy + pc + qy = qy(1+\frac{a}{b}) + pc = m$, som vi kan løse for

$y = \frac{m-pc}{q(1+\frac{a}{b})} = \frac{m-pc}{q\frac{b+a}{b}} = \frac{b(m-pc)}{(a+b)q}$. Bruker vi denne for

$x = c + \frac{a}{b}\frac{q}{p}y = c + \frac{a}{b}\frac{q}{p}\frac{b(m-pc)}{(a+b)q} = c + \frac{a(m-pc)}{(a+b)p} = \frac{(a+b)pc + am - apc}{(a+b)p}$ som vi kan skrive som: $x = \frac{a}{(a+b)p}m + \frac{b}{a+b}c$.

Problemer: Hvordan varierer etterspørselen med endringer i priser og inntekt?

- Hva skjer om $pc \to m$?
- Gitt $pc > m$, hvordan varierer etterspørselen etter de to varene om inntekten øker?
- Hvordan påvirkes etterspørselen om p øker?
- Hva skjer med etterspørselen om prisene og inntekten dobles?
- Hva blir varenes budsjettandeler? Kan du si noe mer om hvorvidt varene er priselastiske eller prisuelastiske i etterspørselen; eller hvorvidt de er luksusgoder?

Spørsmål 1: Vi ser at når utlegget til minstekonsum av x-varen akkurat dekkes av inntekten, vil $y = 0, x = c$.

Spørsmål 2: Vi kan da se på de inntektsderiverte eller Engel-elastisiteter. Her de deriverte: $\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{b}{(a+b)q} > 0$, $\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{a}{(a+b)p} > 0$. Begge varene er fullverdige i etterspørselen.

Spørsmål 3: Vi kan da se på de prisderiverte: $\frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{bc}{(a+b)q} < 0$, og

$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{am}{(a+b)p^2} < 0$. Når prisen på x-varen øker, går etterspørselen etter begge varer ned.

Spørsmål 4: Om vi nå multipliserer prisene og inntekten med tallet 2, ser vi at etterspørselen etter de to varene er upåvirket.

Spørsmål 5: Vi har budsjettandelene $\alpha_x = \frac{px}{m}, \alpha_y = \frac{qy}{m}$. Bruker vi nå etterspørselsfunksjonene, ser vi at $\alpha_x = \frac{px}{m} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\frac{pc}{m}$, som er stigende i prisen p og synkende i inntekten m. Når p øker, må dette bety at utlegget til x-varen, px stiger; varen er med andre ord *prisuelastisk*. Videre ser vi at α_x synker med inntekten. Med positiv inntektsderivert betyr dette at x-varen er et nødvendighetsgode (ikke et luksusgode som ville ha oppvist en positiv sammenheng mellom budsjettandel og inntekt).

$\alpha_y = \frac{qy}{m} = \frac{1}{m}\frac{b(m-pc)}{a+b} = \frac{b}{a+b} - \frac{bpc}{(a+b)m}$ som er voksende i inntekten; $y-$varen har derfor karakter av å være et luksusgode.