Universitetet i Oslo
Økonomisk Insitutt
Kjell Arne Brekke, Rom 1032

ECON2200, Våren 2015
Oppgaver til andre plenumsregning, uke 9.

Oppgave 1 (Optimalisering, konveks/konkav)

La $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

a) Beregn $g'(x)$ og $g''(x)$. Vis at den deriverte kan skrives på formen $g'(x) = (x-1)(x+1)$
b) Undersøk hvor g vokser og avtar. (Hint: Bruk fortegnsdiagram.)
c) Finn stasjonærpunktene til funksjonen.
d) Undersøk hvor g er konveks/konkav.
e) Har funksjonen vendepunkter?
f) Er noen av stasjonærpunktene globale maksimum eller minimumspunkter?
g) Om vi avgrenser definisjonsområdet til $x \geq 0$, vil da noen av stasjonærpunktene være maksimum eller minimumspunkter?

Oppgave 2 (Derivasjon og Elastisiteter)

La $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

a) Finn $f'(x)$ uttrykt ved $g'(x)$ og $g(x)$
b) Finn $El_x\, f$ uttrykt ved $El_x\, g$ ved å bruke resultatet i a) og definisjonen av en elastisitet

Løs oppgave b) ved hjelp av regnereglene for elastisiteter (s.171 i boka, s. 202 i den gamle).

Oppgave 3 (Maksimere funksjoner av flere variable)

(I produksjonsteorien skal vi beskrive produksjonen i en bedrift som en funksjon av bruken av innsatsfaktorer, vi kaller dette en produktfunksjon. En av de aller mest brukte produktfunksjonene er den vi kaller Cobb-Douglas. Om x og y er to innsatsfaktorer sier den at produksjonen er $x^a y^b$. Når vi skal derivere en og to ganger og sjekke nødvendige og tilstrekkelige betingelser, så kan det bli noen litt stygge uttrykk. Ved hjelp av et lite triks, som går ut på å innføre en hjelpestørrelse, viser det seg at alt blir så meget bedre. I denne oppgaven er det fort gjort å tenke at du skjønner hva du skal gjøre men bli fristet til å ikke regne seg helt igjennom den, da det blir noen litt store uttrykk. Men regn deg helt gjennom den før du går og ser den gjennomgått på plenumsregningen. Det kan gi deg en stor fordel, ikke bare på eksamen i dette kurset, men også senere. Cobb-Douglas produktfunksjon vil du møte igjen så lenge du studerer økonomi.)

La $f(x,y) = x^a y^b - x - y$ der $0 < a, b < 1$, og $a + b < 1$, definert for $x, y > 0$. Vi innfører hjelpestørrelsen $z = x^a y^b$.

a) Vis at vi kan skrive $f'_x = ax^{a-1}y^b - 1 = a\dfrac{z}{x} - 1$

b) Finn et tilsvarende uttrykk for f'_y. (Bruk hjelpestørrelsen til å forenkle uttrykket.)

c) Vis at i stasjonærpunktene til funksjonen må tilfredsstille ligningen $ay = bx$.

d) Bruk resultatet i c) og en av førsteordensbetingelsene til å finne stasjonærpunktet til funksjonen.

Vi skal i fortsettelsen se på de andre-deriverte. For å finne de andrederiverte må du huske at z er en funksjon av x og y. Det enkleste er å ta utgangspunkt i de deriverte uttrykt uten hjelpestørrelsen, altså $f'_x = ax^{a-1}y^b - 1$ og tilsvarende for den deriverte med hensyn på y.

e) Vis at $f''_{xx} = a(a-1)\dfrac{z}{x^2}$. Hva kan du si om fortegnet?

f) Utled tilsvarende uttrykk for f''_{yy} og f''_{xy}, og prøv å få uttrykk som er like enkle som i e)

Tilfredsstiller stasjonærpunktet den tilstrekkelige betingelsen for et maksimum?

Oppgave 4 (Omhylningsteoremet)

La $f(x) = \max_t g(t,x)$ der $g(t,x) = 2t - xt^2$

a) Finn $f'(x)$, uten å løse maksimeringsproblemet.

b) Løs maksimeringsproblemet. Det vil si: finn, for enhver *x*, den *t* som maksimerer uttrykket. Sjekk andreordensbetingelser.

c) Bruk svaret i b) til å regne ut funksjonen $f(x)$, (uttrykt bare ved hjelp av *x*) og bruk dette til å finne $f'(x)$.

d) Sammenlign løsningene i a) og b).