Jon Vislie; april 2015
ECON 2200 – 2015

Prosedyre for løsning av oppgaver

Jeg skal ved hjelp av noen oppgaver/eksempler fra produsentens tilpasning, gi forslag til prosedyre/hjelp/veivalg til å løse oppgaver i ECON 2200. Det er tre typer av spørsmål jeg tror mange stiller seg: «Hva er problemet; hvor skal jeg starte?», «Hvordan skal jeg gå fram?» og «Hvorfor skal jeg gjøre det akkurat sånn?». Dette notatet, som følges opp seinere med en tilsvarende oppgave fra konsumentens tilpasning, er kun ment som en støtte til teorien presentert i Strøm & Vislie – dette notatet kan på ingen måte erstatte den grunnleggende teorien. Oppgaver vil (nesten) alltid være spesialtilfeller av mer generelle modeller.

Jeg skal først se på tilpasningen til en bedrift/produsent som bruker én variabel innsatsfaktor til å produsere ett produkt, der tilpasningen er styrt av et mål om å maksimere profitt eller overskudd. Deretter ser vi på et kostnadsminimeringsproblem for en bedrift som produserer ett produkt med en produktfunksjon med flere faktorer som kan substituere hverandre i større eller mindre grad.

Problem 1: Produsenttilpasning – profittmaksimering med én faktor

La oss først se på følgende oppgave som skulle ha vært løst tidligere, nemlig: Betrakt en bedrift med en produktfunksjon $x = F(N)$ der $F(N) = \sqrt{N} = N^{\frac{1}{2}}$, med følgende egenskaper: $F(0) = 0$, grenseproduktivitet $F'(N) = \frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{N}} > 0$, og som selv er avtakende; dvs. $F''(N) = -\frac{1}{4}N^{-\frac{3}{2}} < 0$ for alle $N > 0$. Vi kan tenke oss at N er et mål på bruk av arbeidskraft (antall ansatte) per tidsenhet og x er produsert mengde per tidsenhet. Her vil produkt og sysselsetting måles i samme enhet (litt kunstig, kanskje); alternativt kunne vi ha skrevet $x = \sqrt{aN}$, der a er en konstant som oversetter sysselsetting/antall ansatt per uke til produkt per uke. I vår problemstilling er $a = 1$. Vi finner da at $x^2 = aN \Rightarrow_{(x>0)} \frac{N}{x} = \frac{x}{a}$, der venstre side viser antall sysselsatte per tidsenhet per produsert enhet per tidsenhet, noe også høyre side må gjøre; dermed har $\frac{N}{x}$ mål som antall sysselsatte per produktenhet.

Spørsmål: Angi ytterligere egenskaper til denne produktfunksjonen.

Sentrale begreper, utover grenseproduktivitet og produktakselerasjon, er gjennomsnittsproduktivitet og grenseelastisitet. Alle disse begrepene må en kjenne til! For denne produktfunksjonen har vi vist at grenseproduktiviteten er $F'(N) = \frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}$, mens gjennomsnittsproduktiviteten er $\frac{x}{N} = N^{-\frac{1}{2}}$. Vi ser at $\frac{x}{N} = 2F'(N) > F'(N)$. Videre har vi vist at produktakselerasjonen er negativ; $F''(N) = -\frac{1}{4}N^{-\frac{3}{2}} < 0$. (Siden grenseproduktiviteten er mindre enn gjennomsnittsproduktiviteten, må $\frac{x}{N}$ være synkende med N.)

Sett nå at vi skulle besvare en oppgave om hvordan gjennomsnittsproduktiviteten varierer med innsatsfaktoren. Da må vi se hvordan $\frac{x}{N} = \frac{F(N)}{N} = N^{-\frac{1}{2}}$ selv varierer med N. Siden denne funksjonen er deriverbar, følger det ved derivasjon av $N^{-\frac{1}{2}}$ med hensyn på N, at $\frac{d}{dN}(N^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}N^{-\frac{3}{2}} < 0$. Gjennomsnittsproduktiviteten, for alle $N > 0$, er overalt fallende i bruken av arbeidskraft. Et tredje kjennetegn er gitt ved grenseelastisiteten; dvs. $El_N F(N) = \frac{N}{F(N)} F'(N) = \frac{F'(N)}{\frac{x}{N}} = \frac{1}{2}$.

Neste spørsmål: Utled kostnadsfunksjonen, med tilhørende grense – og gjennomsnittskostnad. Hvordan varierer gjennomsnittskostnaden med produsert kvantum?

Vi skal da fram til en sammenheng mellom (minste) samlet faktorutlegg og produsert kvantum av ferdigvaren. (Med flere produksjonsfaktorer må en, som vi skal se seinere, velge den faktorkombinasjon på en gitt isokvant og som gir lavest samlet faktorutlegg. Her er det kun én produksjonsfaktor.) Vi skal anta at bedriften egentlig ønsker å maksimere overskuddet, og derfor vil den ikke sløse med bruk av arbeidskraft. Det betyr at om den skal produsere en (vilkårlig) mengde x av ferdigvaren, vil den ikke bruke mer arbeidskraft enn høyst nødvendig. (Den står fritt til å bruke mer enn nødvendig, men det innebærer sløsing og dermed høyere kostnader.) Dermed, om det skal produseres x enheter av ferdigvaren (innenfor den perioden vi ser på; f.eks. en uke), vil bedriften ikke bruke mer enn så mye arbeidskraft at en akkurat klarer å frembringe det ønskede antall enheter av ferdigvaren.

Vi finner da, fra produktfunksjonen i dette én-faktortilfellet, (minste) nødvendig innsats av arbeidskraft per uke ved å produsere x enheter av ferdigvaren over en uke. Invertering av produktfunksjonen gir da $N = x^2$, siden vi har $X = \sqrt{N} \Rightarrow N = x^2$. Om hver enhet arbeidskraft koster bedriften W kroner per uke (denne lønna tar bedriften som en eksogent, gitt størrelse, som prisfast kvantumstilpasser i faktormarkedet), vil kostnadsfunksjonen (eller det laveste faktorutlegget) for å produsere x enheter per uke, i kroner, være $C(x;W) = Wx^2$. (Husk at kostnadsfunksjonen viser sammenhengen mellom minste faktorutlegg – i kroner – for enhver gitt produktmengde.) Denne har følgende egenskaper:
$C(0;W) = 0, \dfrac{dC(x;W)}{dx} = 2Wx, \dfrac{C(x;W)}{x} = Wx < \dfrac{dC}{dc}$, og med $\dfrac{d^2C}{dx^2} = 2W$.

Grensekostnaden, $\dfrac{dC}{dx}$, er stigende og større enn gjennomsnittskostnaden som selv er stigende i produsert kvantum, ide Wx jo stiger med produsert kvantum.

Spørsmål: Hvor mye vil bedriften ønske å produsere om målet er profittmaksimering?
Den kostnadsfunksjonen vi har utledet skal nå brukes til å bestemme hvor mye bedriften vil ønske å produsere av ferdigvaren om overskuddet per uke skal maksimeres. Ved utledningen av kostnadsfunksjonen var x vilkårlig – nå skal den

bestemmes eller avledes fra et overordnet mål om å maksimere overskudd eller profitt. Under selve profittmaksimeringen er produsert kvantum en *endogen* variabel. La hver enhet av ferdigvaren selges til en (gitt) pris p på et marked der bedriften opptrer som prisfast kvantumstilpasser. Da kan vi utlede et uttrykk for bedriftens overskudd – målt i kroner per uke – som en funksjon av x:

$\pi(x;p,W) = px - C(x;W) = px - Wx^2 = x\left[p - Wx\right]$. Her er x den variabel bedriften selv skal fastlegge, mens prisene (p,W) er eksogent gitte størrelser. Bedriftens mål er nå: Velg $x \geq 0$ slik at $\pi(x;p,W)$ maksimeres.

Da bruker vi matematikken og leter etter et maksimum. For det første, ser vi at $\pi \geq 0$ for alle $0 \leq x \leq \frac{p}{W}$. Det vil derfor aldri være lønnsomt å produsere mer enn $\frac{p}{W}$ enheter av produktet per uke. (Mens p har benevning kroner per enhet av x, vil W være lønn per ansatt per uke; der hver ansatt svarer til kvadratet av x; dvs. $\frac{p}{W}$ har måleenhet «antall enheter av produktet».)

Vi ser da på den førstederiverte av profitten med hensyn på x. Vi finner da:

$\frac{d\pi(x;p,W)}{dx} := \pi_x(x;p,W) = p - 2Wx$, slik at $\pi_x(0;p,W) = p > 0$ og $\pi_x(\frac{p}{W};p,W) = p - 2p = -p < 0$. Fordi $\pi(x;p,W)$ er en kontinuerlig funksjon av x på det lukkede intervallet $\left[0,\frac{p}{W}\right]$, vil den ha et maksimum (og også et minimum, men det interesserer ikke oss her). Vi er på jakt bare etter et maksimum. Fordi vi har at $\pi_x(0;p,W) > 0$, sammen med $\pi(0;p,W) = 0$ og $\pi_x(\frac{p}{W};p,W) < 0$, samtidig som $\pi_{xx}(x;p,W) = -2W < 0$ for alle x i det interessante mulighetsområdet, vil $\pi(x;p,W)$ ha et entydig globalt maksimum i det indre av det området der profitten er ikke-negativ; dvs. for en $x = x^* \in (0,\frac{p}{W})$ der $\pi_x(x^*;p,W) = p - 2Wx^* = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{p}{2W}$.

Videre har vi at profitten selv er positiv for denne produktmengden siden

$\pi(x^*;p,W)=\frac{p}{2W}\left[p-W\frac{p}{2W}\right]=\frac{p}{2W}\frac{p}{2}=\frac{p^2}{4W}>0$. (Her er det nok å bruke

førstederivert-testen; π er voksende (avtakende) til venstre (høyre) for x^*.)

Neste spørsmål: Hvordan påvirkes tilpasningen av en økning i $\frac{p}{W}$?

Det er vanlig å spørre hvordan bedriften reagerer på «sjokk», prisendringer eller andre ytre (eksogene) endringer. Vi skal nå se hvordan bedriften vil endre tilpasning om «realprisen» $\frac{p}{W}$ øker eller at produktprisen øker mer enn lønna per ansatt per uke. Vi trenger ikke «regne» så mye nå, siden vi ser at tilbudt kvantum $x^*=\frac{p}{2W}$ da vil øke. Da må selvsagt også etterspørsel eller bruk av arbeidskraft per uke øke, siden det er en positiv sammenheng mellom x og N. Profitten vil (selvsagt) også øke.

Problem 2: Produsenttilpasning – kostnadsminimering med to innsatsfaktorer

Nå skal vi betrakte et kostnadsminimeringsproblem med to variable produksjonsfaktorer. Dette betyr at for et gitt produksjonskrav («isokvantbetingelsen»), skal en fastlegge faktorbruken slik at samlet faktorutlegg blir så lavt som mulig. Vi antar at et gitt kvantum av ferdigvaren kan fremstilles ved et uendelig antall faktorkombinasjoner, representert ved den gitte isokvanten $x=F(n,k)=n^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{k}=\sqrt{nk}$, der x nå er et gitt tall (produksjonskrav), samtidig som vi har antatt at produktfunksjonen er gitt som $F(n,k)=n^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}$, definert for $n\geq 0, k\geq 0$.

Spørsmål: Bestem den kostnadsminimerende faktorkombinasjonen.

Med prisen w per enhet av n og q som pris per enhet av k, der begge prisene tas som gitte størrelser av bedriften, består nå problemet i å velge et punkt på den gitte isokvanten slik at samlet faktorutlegg $\left[wn+qk\right]$ minimeres.

Dette problemet kan løses ved Lagranges metode eller ved «innsetting». Ta det siste først. Fra produksjonskravet følger direkte at $nk=x^2$, slik at isokvanten kan representeres ved $k = \frac{x^2}{n}$, som viser at isokvanten er synkende i faktordiagrammet,

$\frac{dk}{dn} < 0$, og krummet mot origo, som er ekvivalent med at den marginale

substitusjonsbrøk, $-\frac{dk}{dn} = \frac{x^2}{n^2}$, er avtakende i n.

Setter vi inn for $k = \frac{x^2}{n}$ i uttrykket for faktorutlegget, får vi en funksjon kun av n;

dvs., en vi definerer som $\psi(n) := wn + q\frac{x^2}{n}$, som vi skal finne minimum for.

Vi leter da opp stasjonærpunkt(er): $\psi'(n) = w + \frac{0 \cdot n - qx^2}{n^2} = w - \frac{qx^2}{n^2} = 0$, dvs. vi

finner $n^2 = \frac{q}{w}x^2 \Rightarrow \tilde{n} = (\sqrt{\frac{q}{w}}) \cdot x$. (Bare den positive roten gir mening.) Dette punktet

må være et minimumspunkt siden vi har at $\psi''(n) = \frac{2qx^2n}{(n^2)^2} = \frac{2qx^2}{n^3} > 0$. (Det er også

lett å se at $\psi(n)$ er synkende for $n < \tilde{n}$, og stigende for $n > \tilde{n}$.

(«Førstederiverttesten» viser dermed at $n = \tilde{n}$ løser vårt problem.)
Setter vi nå inn for $\tilde{n}$ i vår isokvantbetingelse, finner vi den tilhørende

kostnadsminimerende bruken av k som: $\tilde{k} = \frac{x^2}{\tilde{n}} = \frac{x^2}{\sqrt{\frac{q}{w}} \cdot x} = \sqrt{\frac{w}{q}} \cdot x$.

Dermed har vi svar på vårt spørsmål: Den faktorkombinasjon som minimerer bedriftens faktorutlegg med den oppgitte produktfunksjonen og med gitt

produksjon, er: $(\tilde{n}, \tilde{k}) = \left\{\sqrt{\frac{q}{w}} \cdot x, \sqrt{\frac{w}{q}} \cdot x\right\}$. Dette gir oss samtidig de betingede

faktoretterspørselsfunksjonene.

Alternativ kan vi benytte Lagranges metode. Siden vi nå vet at det finnes en løsning, vet vi også at det finnes en lagrangemultiplikator $\mu > 0$, slik at den kostnadsminimerende faktorkombinasjonen fremkommer som stasjonærpunktene til Lagrangefunksjonen $L(n,k,\mu) = wn + qk - \mu\left[\sqrt{nk} - x\right]$, gitt ved

$$\frac{\partial L}{\partial n} = w - \mu\frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{2w}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = 2w\sqrt{\frac{n}{k}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = q - \mu\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{2q}{\sqrt{\frac{n}{k}}} = 2q\sqrt{\frac{k}{n}}$$

Sammen med isokvantbetingelsen har vi da tre betingelser til å bestemme de tre variablene (n,k,μ). (I en figur er denne løsningen kjennetegnet ved at den gitte isokvanten tangerer en isokostlinje; dvs. at $MTSB = \frac{w}{q}$, der vi nå har $MTSB = \frac{F_n}{F_k} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{k}}} = \frac{k}{n}$.) Lagrangemultiplikatoren kan elimineres fra likheten $2w\sqrt{\frac{n}{k}} = 2q\sqrt{\frac{k}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{k} = \frac{q}{w}$ som gir $wn = qk$; jfr. kravet også om at $MTSB = \frac{w}{q}$.

Bruker vi denne sammenhengen i produktfunksjonen, som er bibetingelsen i vårt problem, finner vi: $x = \sqrt{nk} = \sqrt{n \cdot n\frac{w}{q}} = \sqrt{\frac{w}{q}n^2} = n\sqrt{\frac{w}{q}}$, som gir $\tilde{n} = \sqrt{\frac{q}{w}} \cdot x$, slik vi viste tidligere.

Spørsmål: Hva kjennetegner disse betingede faktoretterspørselsfunksjonene?

De er lineære i produsert kvantum – dette følger av at produktfunksjonen har konstant skalautbytte eller homogen av grad én («pari passu»); summen av grenseelastisitetene er lik én. Videre ser vi at hver faktor vil være synkende i egen pris og voksende i den andre prisen. Dette betyr at jo høyere w er, jo mindre vil en bruke av n og jo mer vil en bruke av k.

Spørsmål: Utled kostnadsfunksjonen og angi egenskaper ved denne.

Kostnadsfunksjonen er nå det minimerte faktorutlegget, for den gitt produksjonen;

dvs., vi har $C(x;w,q) := w\tilde{n} + q\tilde{k} = \left[w\sqrt{\frac{q}{w}} + q\sqrt{\frac{w}{q}}\right]x = \left[w^{1-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + q^{1-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}\right]x = 2\sqrt{wq}\cdot x$,

der $2\sqrt{wq} = 2w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} = 2(wq)^{\frac{1}{2}}$ er enhetskostnadsfunksjonen, lik grensekostnaden, gitt

som $\frac{dC}{dx} = 2\sqrt{wq}$. Siden enhetskostnaden eller gjennomsnittskostnaden er uavhengig

av produsert kvantum, er kostnadsfunksjonen lineær i x.

Spørsmål: Hvordan varierer kostnaden med lønna?

Vi skal nå se på $\frac{\partial C}{\partial w}$. Partiell derivasjon av kostnadsfunksjonen med hensyn på w,

gir oss:

$\frac{\partial C}{\partial w} = 2\cdot\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x = \sqrt{\frac{q}{w}}\cdot x = \tilde{n}(x;w,q)$ som er Shephard's lemma.

Den minimerte kostnaden er høyrer jo høyere en faktorpris er.

Spørsmål: Hvorfor er profittmaksimering «problematisk» når vi har konstant skalautbytte slik som her? (Svar: Se boka s. 92-93.)