Løsningsforslag til eksamensoppgaver i ECON 2200 – våren 2015

Oppgave 1 (7 poeng)

Deriver følgende funskjoner

a) $f(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ gir $f'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = e^{x^2} = \exp(x^2)$ gir $f'(x) = e^{x^2} 2x$

c) $f(x) = \ln \frac{1}{3-2x}$ gir $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{3-2x}} \frac{-1}{(3-2x)^2}\left(-2\right) = \frac{2}{3-2x}$

alternativt $f(x) = \ln 1 - \ln\left(3-2x\right)$ gir $f'(x) = -\frac{1}{3-2x}\left(-2\right) = \frac{2}{3-2x}$

Deriver med hensyn på begge variable

d) $g(x,y) = \ln(x-y)$ der $x > y$

$g'_x = \frac{1}{x-y}$ og $g'_y = -\frac{1}{x-y}$

e) Finn $\frac{\partial z}{\partial t}$ og $\frac{\partial z}{\partial s}$ når $z = x^2 y$ og $x = t+s,\ y = t-s$

$\frac{\partial z}{\partial t} = 2xy + x^2$ og $\frac{\partial z}{\partial t} = 2xy - x^2$

Oppgave 2. Sant eller galt? (4 poeng)
For hver av påstandene nedenfor avgjør om de er generelt sanne eller gale.

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ Riktig

b) $e^{\ln x} = x$ Riktig

c) $\frac{2x+3y}{3x} = \frac{2\cancel{x}+3y}{3\cancel{x}} = \frac{2+3y}{3}$ Riv ruskende GALT

d) $\sum_{i=3}^{6} i^2 = \sum_{i=0}^{3} (i+3)^2$ Riktig

Oppgave 3 (10 poeng)
En konsument har nyttefunskjon

$$u(c_1, c_2) = \ln c_1 + \ln c_2$$

og maksimerer nytten gitt budsjettbetingelsen

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = m$$

a) Sett opp Lagrangefunksjonen og tilhørende førsteordensbetingelser og vis at begge varene har samme budsjettandel.

$$L = \ln c_1 + \ln c_2 - \lambda(p_1 c_1 + p_2 c_2 - m)$$

$$L'_1 = \frac{1}{c_1} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow p_1 c_1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$L'_2 = \frac{1}{c_2} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow p_2 c_2 = \frac{1}{\lambda}$$

Altså er $p_1 c_1 = p_2 c_2 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{p_1 c_1}{m} = \frac{p_2 c_2}{m}$

b) Bruk resultatet i a) til å utlede etterspørselsfunksjonen for de to varene.

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = 2 p_1 c_1 = m$$

$c_1 = \frac{m}{2p_1}$ tilsvarende for c_2

Betrakt nå en konsumet som velger mellom N forskjellige varer, der $N \geq 2$ er et heltall. Nyttefunksjonen er

$$\sum_{i=1}^{N} \ln c_i$$

og budsjettbetingelsen er

$$\sum_{i=1}^{N} p_i c_i = m$$

c) Sett opp Lagrangefunksjonen i dette tilfellet og vis at førsteordensbetingelsen medfører at

$p_i c_i = \frac{1}{\lambda}$ for alle i

Denne følger på samme måte som i a, utfordringen her er å derivere en større sum.

d) Hva blir budsjettandelen til vare i ? *Alle varer har samme budsjettandel, altså* $\frac{1}{N}$

Oppgave 4 Er påstandene generelt sanne eller gale? Begrunn svaret. (12 poeng)

a)

$$c_1(p_1, p_2, Y(p_1, p_2, u)) = h_1(p_1, p_2, u)$$

Sant. Den ene finner optimalt konsum for gitt inntekt og den andre for gitt nytte, men $Y(p_1, p_2, u)$ *er* *akkurat inntekten en trenger for å nå opp til nytten. En figur er bra.*

b) En monopolist vil normalt sette en pris som er lavere en grensekostnaden.
Usant. En monopolist setter normalt grensekostnad lik grenseinntekt. med fallende etterspørsel er grenseinntekten lavere enn pris. Prisen blir derfor høyere enn grensekostnaden.

c) La $f(x)$ være en kontinuerlig og deriverbar funksjon som er definert overalt. Dersom $f'(c) = 0$ og $f''(c) \leq 0$ så er c et globalt maksimumspunkt.
Usant. En tilstrekkelig betingelse er at f *er konkav, som krever at* $f''(x) \leq 0$ *for alle* x *ikke bare i punktet* $x = c$.

d) Dersom $g(r) = \max_x(\ln x - rx)$ så er

$$g'(r) = \frac{1}{x} - r$$

Usant: Omhylningsteoremet gir $g'(r) = -x$

Oppgave 5 (6 poeng)
a) Finn stasjonærpunktet til funksjonen

$$f(x,y) = \ln x + 3\ln y - x - 9y$$

$$\frac{1}{x} = 1$$
$$\frac{3}{y} = 9$$
$$x = 1,\ y = 1/3$$

b) Vis at andreordensbetingelsene er oppfylt.

$$f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} \leq 0$$
$$f''_{yy} = -\frac{3}{y^2} \leq 0$$
$$f''_{xy} = 0 \text{ så } f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \geq 0$$

Oppgave 6.

a) La $x = f(v) = v^a$. Vi finner grenseproduktivitet som $f'(v) = av^{a-1}$ og gjennomsnittsproduktivitet som $\dfrac{x}{v} = v^{a-1} = \dfrac{f'(v)}{a} > f'(v)$ for alle $v > 0$.

b) Vi ser at $\frac{d}{dv}\left[\frac{x}{v}\right] = \frac{d}{dv}(\frac{f'(v)}{a}) = \frac{1}{a}f''(v) = (a-1)v^{a-2} < 0$; dvs. synkende (følger også av at grenseproduktiviteten selv er mindre enn gjennomsnittsproduktivitet).

c) Invertering av produktfunksjonen gir $v = x^{\frac{1}{a}}$, slik at $qv(x) = C(x;q) = qx^{\frac{1}{a}}$. (Vi har at $C(0;q) = 0$.) Vi finner da grensekostnad som $C_x = \frac{d}{dx}C(x;q) = \frac{q}{a}x^{\frac{1}{a}-1} = \frac{q}{a}x^{\frac{1-a}{a}}$, mens gjennomsnittskostnad er $\frac{C}{x} = qx^{\frac{1}{a}-1} < C_x$ for alle $x > 0$. (Vi ser også at $C_{xx} = \frac{d}{dx}C_x = \frac{q}{a}(\frac{1}{a}-1)x^{\frac{1-a}{a}-1} > 0$.)

d) Vi har profitten: $\pi(x;p,q) = px - C(x;q) = px - qx^{\frac{1}{a}}$. For at drift er lønnsomt, må $\pi_x(0;p,q) = p - C_x(0;q) = p > 0$. Siden vi også har at bare x blir tilstrekkelig stor, vil $\pi < 0$. Da vil det eksistere en positiv verdi på produsert kvantum, x^* som maksimerer profitten, med førsteordensbetingelsen

$\pi_x(x^*;p,q) = p - C_x(x;q) = p - \frac{q}{a}x^{\frac{1-a}{a}} = 0$ for $x = x^*$. Siden vi har at

$\pi_{xx} = -C_{xx} < 0$ for alle $x > 0$, har vi at $x = x^*$ er et globalt profittmaksimum.

e) Fra FOB finner vi da tilbudsfunksjonen for det ferdige produktet:

$x^{\frac{1-a}{a}} = \frac{ap}{q} \Rightarrow x^T = S(p,q) = \left[\frac{ap}{q}\right]^{\frac{a}{1-a}}$ og etterspørselsfunksjonen for innsatsfaktoren

fra $v = x^{\frac{1}{a}} = v^E(p,q) = \left[\frac{ap}{q}\right]^{\frac{1}{1-a}}$. Siden kun relativ pris betyr noe, ser vi at høyere p

er ekvivalent med lavere q. Vi finner da: $S_p = \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{a^2}{q(1-a)}\left[\frac{ap}{q}\right]^{\frac{a}{1-a}-1} > 0$ og

$\frac{\partial v^E}{\partial p} = \frac{a}{q(1-a)}\left[\frac{ap}{q}\right]^{\frac{1}{1-a}-1} > 0$.

f) Monopol: Profitten er nå $\Pi(x) = (A-x)x - qx - B$, som er profitt ved drift, mens om vi velger driftsstans, vil de faste kostnadene falle bort. Dermed er betingelsen for drift at $\Pi \geq 0$. Vi har at $\Pi'(x) = A - 2x - q$ med $\Pi'(0) = A - q$. Hvis $A > q$, da vil produksjon lønne seg. Siden det da finnes produksjonskvanta så store at profitten kan bli negativ, vil et profittmaksimum være kjennetegnet ved $\Pi'(x) = 0$, samtidig som dette r et globalt maksimum siden $\Pi'' = -2 < 0$ for alle

x. Kvantum er da bestemt ved $A-2x-q=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left[A-q\right]$. Monopolprisen finner vi da fra $p=A-x=\frac{1}{2}(A+q)$.

g) Betrakt monopolprofitten

$$\Pi(x)=\frac{1}{2}(A+q)\cdot\frac{1}{2}(A-q)-\frac{q}{2}(A-q)-B=\frac{1}{2}(\mathrm{A}-q)\left[\frac{1}{2}(A+q)-q\right]-B=\frac{1}{4}(A-q)^2-B$$

Siden de faste kostnadene i sin helhet faller bort ved driftsstans, er betingelsen for drift at $\frac{1}{4}(A-q)^2-B\geq 0 \Leftrightarrow A-q\geq 2\sqrt{B} \Leftrightarrow q\leq A-2\sqrt{B}$. Om ulikheten går den andre veien, vil midlertidig driftsstans være lønnsomt.

h) Økt marginalkostnad q, så lenge drift lønner seg er at $\frac{\partial x}{\partial q}=-\frac{1}{2}$, mens monopolprisen øker med halvparten av økningen i q.

Oppgave 7.

a) MSB angir hvor mye av en vare en er villig til å bytte bort for en marginal enhet av en annen vare, uten at nyttenivået går ned. $MSB=\frac{U_1}{U_2}=[-\frac{dc_2}{dc_1}]_{U=konst}$.

b) Maksimering av $U=a\ln(c_1-A)+b\ln c_2$ gitt $p_1c_1+p_2c_2=m$, finner vi ved Lagrange: $L=a\ln(c_1-A)+b\ln c_2-\lambda\left[p_1c_1+p_2c_2-m\right]$. Den nyttemaksimerende tilpasningen må da oppfylle:

$$\frac{\partial L}{\partial c_1}=\frac{a}{c_1-A}-\lambda p_1=0=\frac{\partial L}{\partial c_2}=\frac{b}{c_2}-\lambda p_2\Rightarrow\lambda=\frac{a}{(c_1-A)p_1}=\frac{b}{p_2c_2}\Leftrightarrow ap_2c_2=bp_1(c_1-A)$$

c) Fra denne tangeringsbetingelsen, finner vi $p_1c_1=p_1A+\frac{a}{b}p_2c_2$, som inn i budsjettbetingelsen gir:

$$p_1A+(\frac{a}{b}+1)p_2c_2=m\Rightarrow p_2c_2=\frac{1}{1+\frac{a}{b}}\left[m-p_1A\right]=\frac{b}{a+b}\left[m-p_1A\right]\Rightarrow$$

$$c_2=\frac{b}{p_2(a+b)}\left[m-p_1A\right]=\frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}-\frac{b}{a+b}\frac{p_1}{p_2}A$$

Dermed følger

$$p_1 c_1 = p_1 A + \frac{a}{b}\frac{b}{a+b}\left[m - p_1 A\right] = \frac{a}{a+b} m + p_1 A(1 - \frac{a}{a+b}) = \frac{a}{a+b} m + \frac{b}{a+b} p_1 A$$

som gir: $c_1 = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} + \frac{b}{a+b} A$. Dermed har vi de to etterspørselsfunksjonene.

d) Vi har da, på derivertform:

$$\frac{\partial c_1}{\partial m} = \frac{a}{(a+b)p_1} > 0,\ \ \frac{\partial c_2}{\partial m} = \frac{b}{(a+b)p_2} > 0$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1} = \frac{-am(a+b)}{(a+b)^2 p_1^2} = -\frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1^2} < 0 \text{ og } \frac{\partial c_2}{\partial p_1} = -\frac{bA}{(a+b)p_2} < 0$$

e) Med $A = 0$, følger $\alpha_1 := \frac{p_1 c_1}{m} = \frac{a}{a+b}$ og $\alpha_2 := \frac{p_2 c_2}{m} = \frac{b}{a+b}$. Begge konstante.

f) Vare 1 er uelastisk (elastisk) i etterspørselen om samlet utlegg til varen stiger (synker) med prisen: dvs. om $p_1 c_1$ selv stiger (synker) med prisen. Vi finner da med $A = 0$, at $p_1 c_1 = \frac{a}{a+b} m$, slik at $El_{p_1} c_1 = 1 + e_{11} = 0 \Leftrightarrow e_{11} = -1$; dvs. nøytral elastisk. Utlegget til vare 1 er det samme uansett prisene. Videre ser vi at fordi etterspørselen etter begge varer er større jo høyere inntekten er, er de begge normale eller fullverdige i etterspørselen. (Budsjettandelene er konstante; derfor er varenes inntektselastisiteter begge lik én.)

g) Slutsky-likningen forteller oss, med S_{ij} som Slutsky-elastisitet, at

$e_{11} = S_{11} - \alpha_1 E_1 = -1 \Rightarrow S_{11} = -1 + \alpha_1 = -(1 - \alpha_1) = -\alpha_2 < 0$, bruker at $E_1 = 1$ og at summen av budsjettandelene må være lik én. Den direkte substitusjonsvirkningen er negativ. Og videre fordi etterspørselen etter vare 2, med $A = 0$, er uavhengig av p_1, må vi ha: $e_{21} = S_{21} - \alpha_1 E_2 = 0 \Rightarrow S_{21} = \alpha_1 > 0$, fordi $E_2 = 1$. (Fordi $\sum_j S_{ij} = 0$ for alle varer i, som følge av at de ordinære etterspørselsfunksjonene er homogene av grad null i priser og inntekt), har vi derfor at $S_{11} = -S_{12} = -\alpha_2$ og $S_{21} = -S_{22} = \alpha_1$. Alternativt har vi at

$\frac{\partial c_i}{\partial p_1} = \frac{\partial h_i}{\partial p_1} - c_1 \frac{\partial c_i}{\partial m}$, med h_i som kompensert etterspørsel, og slik at

$\frac{\partial h_i}{\partial p_1} = \frac{\partial c_i}{\partial p_1} + c_1 \frac{\partial c_i}{\partial m}$. For $i = 1$ har vi da:

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \frac{\partial c_1}{\partial p_1} + c_1 \frac{\partial c_1}{\partial m} = -\frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1^2} + c_1 \frac{a}{(a+b)p_1} = -\frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1^2} + \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} \cdot \frac{a}{(a+b)p_1},$$

som vi kan ordne til $\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1^2}\left[\frac{a}{a+b} - 1\right] = -\frac{ab}{(a+b)^2}\frac{m}{p_1^2}$. Videre har vi for $i = 2$ at $\frac{\partial h_2}{\partial p_1} = \frac{\partial c_2}{\partial p_1} + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial m} = 0 + \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} \cdot \frac{b}{(a+b)p_2} = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot \frac{m}{p_1 p_2}$.

Oppgave 8

a) Profitten for gitt arbeidstid, er $\pi = pF(hN) - whN$. Lønnsom drift om det fins timeverksinnsats slik at profitten er positiv. Siden $\pi(0) = 0$ er en tilstrekkelig betingelse for drift at $\frac{d\pi(0)}{dN} = pF'(0)h - wh = [pF'(0) - w]h > 0$. Denne betingelsen må også være nødvendig all den tid $F'' < 0$.

b) Valg av profittmaksimerende sysselsetting, for gitt h er: $pF'(h\hat{N}) = w$, samtidig som vi har $pF''(hN)h < 0$.

c) Virkning på $\hat{N}$ av lavere arbeidstid, for gitt lønn: Derivasjon av FOB mhp. h, når $\hat{N}$ varierer med h: $pF'' \cdot \left[\hat{N} + h\frac{d\hat{N}}{dh}\right] = 0 \Leftrightarrow \hat{N} + h\frac{\partial \hat{N}}{\partial h} = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{\hat{N}}\frac{\partial \hat{N}}{\partial h} = -1$. Hvis h går ned med 10 %, må $\hat{N}$ øke med 10 %. (Opplagt siden $h\hat{N}$ må være konstant så lenge prisene er konstante.)

d) Virkning på $\hat{N}$ av høyere lønn for uendret arbeidstid: Fra FOB har vi:

$$pF''(h\hat{N}) \cdot h \cdot \frac{\partial \hat{N}}{\partial w} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \hat{N}}{\partial w} = \frac{1}{pF''(h\hat{N})h} < 0$$

Oppgave 9

a) Vi antar som normalt at $D_p < 0$ (normal vare) og $S_p > 0$; fallende etterspørselskurve og stigende tilbudskurve. Anta også at $D_\alpha > 0$, der en høyere verdi på en slik skiftparameter fører til økt etterspørsel for samme pris – kan forårsakes av

- Høyere inntekter
- Økt pris på et substitutt
- Lavere pris på et komplementært gode

- Flere kjøpere og/eller nye bruksområder

Anta at $S_\beta > 0$, slik at en økning i β gir økt tilbud for uendret pris; kan være forårsaket av:

- Reduserte faktorpriser (negative skift i grensekostnader)
- Nye bedrifter
- Bedre produktivitet eller teknisk fremgang

b) Likevekt er kjennetegnet ved at $D(p;\alpha) = S(p;\beta) \Rightarrow p^* = p(\alpha,\beta)$ og med markedskvantum også bestemt av disse størrelsene.
En høyere verdi på β kan studeres ved å se hvordan $D(p(\alpha,\beta),\alpha) = S(p(\alpha,\beta),\beta)$ påvirkes: Implisitt derivasjon gir da: $D_p \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = S_p \dfrac{\partial p}{\partial \beta} + S_\beta \Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = \dfrac{S_\beta}{D_p - S_p} \leq 0$; positivt skift i tilbudet vil gi lavere (ikke høyere) markedspris (kan lett illustreres), mens kvantumsvirkningen kan vises ved å se på $\dfrac{\partial X}{\partial \beta} = D_p \dfrac{\partial p}{\partial \beta} \leq 0$.

Hvis etterspørselen er helt prisuelastisk, men $D_p \to 0$ som et yttertilfelle, ser vi at $\dfrac{\partial p}{\partial \beta} \to \dfrac{S_\beta}{-S_p} < 0$, mens $\dfrac{\partial X}{\partial \beta} \to 0$.

Om etterspørselen er fullkomment elastisk, med $D_p \to -\infty$, vil prisen være upåvirket, mens markedskvantum vil øke i henhold til $\dfrac{\partial X}{\partial \beta} = \dfrac{D_p S_\beta}{D_p - S_p} = \dfrac{S_\beta}{1 - \frac{S_p}{D_p}} \to S_\beta$ svarende til skiftets størrelse.