UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Øvelsesoppgave i: ECON2200 – Matematikk 1/Mikro 1

Dato for utlevering: 27.3.2017

Dato for innlevering: 7.4.2017 innen kl. 15.00

Innleveringssted: Fronter

Øvrig informasjon:

- Denne øvelsesoppgaven er **obligatorisk.** Kandidater som har fått den obligatoriske øvelsesoppgaven godkjent i et tidligere semester skal ***ikke*** levere på nytt. Dette gjelder også i tilfeller der kandidaten ikke har bestått eksamen.
- Øvelsesoppgaven skal leveres innen fristen. Oppgaver levert etter fristen vil ikke bli rettet.*
- Øvelsesoppgaven skal leveres på innleveringsstedet som er angitt over. Du skal ***ikke*** levere øvelsesoppgaven direkte til emnelæreren eller med e-post.
- Denne oppgaven vil ikke bli gitt en tellende karakter. En eventuell karakter er kun veiledende.
- **Det skal leveres individuelle besvarelser. Det er tillatt å samarbeide, men identiske besvarelser (direkte avskrift) vil ikke bli godkjent.**
- Informasjon om innleveringsoppgaver og kildebruk: **https://www.sv.uio.no/studier/ressurser/skriver%C3%A5d/sv.html.**
- Informasjon om konsekvenser ved fusk her: **http://www.uio.no/studier/eksamen/fusk/index.html.**
- Dersom besvarelsen din ikke blir godkjent, vil du få en mulighet til å levere en ny besvarelse. Det vil da være en kortere innleveringsfrist. (Merk: Å levere «blankt» gir ikke rett til nytt forsøk.) Dersom heller ikke dette forsøket lykkes, vil du ikke få anledning til å avlegge eksamen i dette emnet. Du vil da bli trukket fra eksamen, slik at det ikke vil bli et tellende forsøk.

*Dersom en student mener at han eller hun har en gyldig grunn for ikke å levere oppgaven innen fristen bør han/hun søke om utsettelse. Normalt vil utsettelse kun bli innvilget dersom det er en dokumentert grunn (for eksempel legeerklæring). Les mer om dette her: https://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/sv-fraver-fra-obligatorisk-aktivitet.html

Obligatorisk øvelsesoppgave

ECON2200 Vår 2017

Oppgave 1 (10 poeng) Finn alle de førstederiverte til følgende funksjoner:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$

b) $g(x) = 4x^2 e^x + (\ln x)^x$ (hint: bruk $\phi(x) = e^{\ln \phi(x)}$ for $\phi(x) = (\ln x)^x$)

c) $h(x, y) = (xye^{xy})^2$

Oppgave 2 (5 poeng) Sant eller usant? (Begrunn svaret kort).

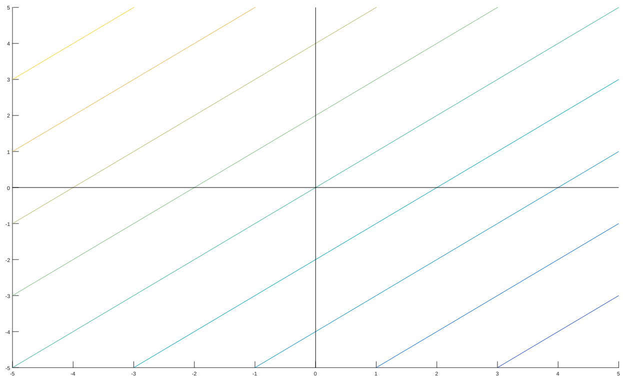
a) Dersom problemet $\max_x \pi(x) = px - c(x)$ har en indre entydig løsning, vet vi med sikkerhet at $c''(x) \geq 0$.

b) Dersom $g(x) = \ln x$ har $g(x)$ en invers funksjon, og dersom vi kaller den inverse funksjonen $h(g(x))$ er $h'(2) = e^2$

c) $((x^p)^b)x^a = x^{a+b+p}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ er deriverbar i punktet $x_0 = 0$.

e) Følgende nivåkurver er de første nivåkurvene til funksjonen $f(x, y) = x - y$, og preferanseretningen er "sørøst", altså "nedover og til høyre".



Figur 1: Nivåkurver

Oppgave 3 (15 poeng) Hva er definisjonsområdet til følgende funksjoner? Bestem om funksjonene er konvekse eller konkave i sitt definisjonsområde. Tegn en skisse av funksjonene i a og b.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)^2$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) Tegn en skisse av nivåkurvene til funksjonen i c for $f(x, y) = [1, 4, 9, 16]$

Oppgave 4 (15 poeng)

a) Løs følgende optimeringsproblem ved bruk av Lagrange-metoden:

$$\max_{x,y} f(x, y) = ph(x, y) \tag{1}$$

gitt at $g(x, y) = c$

der p, c er konstanter.

b) Vis at Lagrange-problemet har en indre løsning, dersom $h(x, y)$ er konkav, og $g(x, y)$ er konveks.

c) Anta at løsningen i a definerer de optimale valgene av x, y som funksjoner av p, c, altså $x = x^*(p, c), y = y^*(p, c)$. Hva blir endringen i verdifunksjonen $f^*(p, c)$

dersom i) p endres, og ii) c endres (hint: bruk omhyllingsteoremet).

d) Anta nå at $h(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ og at $g(x,y) = x + y$, og at $f(x,y)$ er som gitt ovenfor. Finn eksplisitte uttrykk for x^* og y^*.

e) Finn $f^*(p,c)$ ved å bruke resultatet i d.

f) Finn $\frac{\partial f^*(p,c)}{\partial p}$ og $\frac{\partial f^*(p,c)}{\partial c}$ ved å derivere funksjonen du fant i e. Hvordan kunne du funnet svaret ved bruk av omhyllingsteoremet?

Oppgave 5 (5 poeng) Finn y' i følgende likninger:

a) $(x^2 y)(\ln(yx)) = 5$

b) $e^{xy} = x^2 - yx + 1$

Oppgave 6 (5 poeng) En bedrift produserer en vare (i mengde x) med en kostnadsfunksjon $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$.

a) Angi egenskaper til denne funksjonen, dvs. om den er voksende/avtakende, og for hvilke produktmengder den er konkav og/eller konveks.

b) Utled grense- og gjennomsnittskostnaden. For hvilken produktmengde når gjennomsnittskostnaden sitt minimum?

Anta at produsenten selger den produserte varen i et marked til en eksogen pris p.

c) Utled tilbudsfunksjonen (vær nøye med å presisere at for noen produktpriser vil tilbudt kvantum være null).

Oppgave 7 (10 poeng) Betrakt en produktfunksjon med positive, men avtakende grenseproduktiviteter og som er homogen av grad m. Dette betyr at $f(tn, tk) = t^m f(n,k)$.

a) Vis hvordan grenseproduktiviteten til n nå vil påvirkes av en t-dobling av faktorene, og vis spesielt at for $m = 1$, vil vi ha at $\frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tn)} = \frac{\partial f(n,k)}{\partial n}$.

b) Begrunn med dette utgangspunktet hvorfor substitumalen da er en faktorstråle (en rett linje gjennom origo).

c) Betrakt nå produktfunksjonen $X = F(N, K)$ som antas å være homogen av grad en og med strengt positive og avtakende grenseproduktiviteter. Vis at vi da kan skrive produktmengde per arbeider, $x := \frac{X}{N} = f(k) := F\left(1, \frac{K}{N}\right)$, der k er kapitalmengde per arbeider.

d) Fra sammenhengen $F(N, K) = N \cdot f\left(\frac{K}{N}\right)$ skal du utlede hvordan de to grenseproduktivitetene $\frac{\partial F}{\partial N}$ og $\frac{\partial F}{\partial K}$, kan uttrykkes ved $f(k)$ og $f'(k)$.

Oppgave 8 (15 poeng) En bedrift har produktfunksjonen

$x = f(n, k) = n^{1/3}(k + a)^{1/3}$, der a er en konstant større enn null. Vi antar at $n \geq 0$ og $k \geq 0$.

a) Finn grenseproduktivitetene.

b) Bestem den marginale tekniske substitusjonsbrøk.

c) Finn et uttrykk for en isokvant for produktmengden $x = x_0$.

d) Skisser isokvantene for $x = 1$ og for $x = 2$ når $a = 1$.

e) Finn også et uttrykk for substitumalen når faktorprisene er w og q for henholdsvis arbeidskraft n og realkapital k.

f) Vis at den betingede faktoretterspørselsfunksjonen for k kan skrives med formelen:

$$k = \sqrt{\frac{w}{q}} \cdot x^{3/2} - a$$

I fortsettelsen skal vi bare se på løsninger der dette uttrykket for k gir en strengt positiv verdi.

g) Finn den betingede faktoretterspørselsfunksjonen for n.

h) Utled kostnadsfunksjonen, samt gjennomsnitts- og grensekostnad.

i) Finn tilpasningen for en profittmaksimerende bedrift som har den oppgitte produktfunksjonen, og som opptrer som prisfast kvantumstilpasser både i produkt- og faktormarkedene. Utled tilbudsfunksjonen og angi hvordan tilbudt kvantum varierer med prisene.

j) Utled profittfunksjonen og vis hvordan vi kan avlede de ubetingede faktoretterspørselsfunksjonene fra denne.

Oppgave 9 (15 poeng) La en konsument ha preferanser over to varer, gitt ved (C_1, C_2), uttrykt ved nyttefunksjonen $U(C_1, C_2) = (C_1 - y)^\beta C_2$, med y som en konstant som viser et minimumsforbruk av vare 1, og med β som en positiv konstant. La prisene på de to varene være p_1 og p_2, og anta at nominell inntekt er gitt ved m. Vi skal anta at $m > p_1 y$. Utled tilpasningen ved hjelp av Lagranges metode og fastlegg de ordinære etterspørselsfunksjonene for de to varene. Angi egenskaper ved disse funksjonene ved hjelp av Engelelastisiteter og Cournotelastisiteter. Kan du på grunnlag av det du har utledet om hvordan budsjettandelene til de to varene varierer med priser og inntekt si noe om hvorvidt varene er nødvendighetsvarer og/eller luksusvarer?

Oppgave 10 (5 poeng) Løs følgende maksimeringsproblem:

Maksimer $u(x) + \beta v(y)$ gitt $x + y = S$, der funksjonene u og v begge er to ganger deriverbare, strengt voksende og med avtakende derivert (negativ annenderivert), med $u(0) = v(0) = 0$, og med en β som en positiv konstant. Hva kjennetegner en indre løsning? Illustrer denne i et badekardiagram. Vis hvordan den optimale løsningen påvirkes av

i) Økt S

ii) Økt β