Seminaruke 4, løsningsforslag.

Jon Vislie
Nina Skrove Falch

a) Gjennomsnittsproduktiviteten er produsert mengde per arbeidstime;

$$\frac{x}{n} = \frac{An^{\alpha}}{n} = An^{\alpha-1}$$

Grenseproduktiviteten er

$$\frac{dx}{dn} = A\alpha n^{\alpha-1} = \alpha \frac{x}{n}$$

Dermed har vi at om α er større, mindre eller lik én, er grenseproduktiviteten større, mindre eller lik gjennomsnittsproduktiviteten. Når grenseproduktiviteten er større enn gjennomsnittsproduktiviteten, må gjennomsnittsproduktiviteten vokse. Vi ser at $\frac{d(\frac{x}{n})}{dn} = \frac{n\frac{dx}{dn}-x}{n^2} = \frac{1}{n}\left[\frac{dx}{dn} - \frac{x}{n}\right]$som er positiv (negativ) så lenge grenseproduktiviteten er større (mindre) enn gjennomsnittsproduktiviteten selv. Videre har vi: $\frac{d(\frac{x}{n})}{dn} = \frac{1}{n}\frac{x}{n}\left[\alpha - 1\right] \leq 0$ om $\alpha \leq 1$.

b) Lavest faktorutlegg for gitt produktmengde er den laveste lønnskostnaden det er mulig å frembringe den gitte produktmengden til. For gitt produktmengde x, vil vi fra produktfunksjonen ha $n = x^{\frac{1}{\alpha}}$, slik at samlet minimert faktorutlegg eller kostnaden er:

$$C(x; w) = w \cdot x^{\frac{1}{\alpha}}$$

Gjennomsnittskostnaden er:

$$\overline{C}(x; w) = \frac{C(x; w)}{x} = wx^{\frac{1}{\alpha}-1} = wx^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Grensekostnad er :

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{\alpha}wx^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \overline{C}(x; w).$$

Legg merke til om $\alpha < 1$, da er grensekostnaden høyere enn gjennomsnittskostnaden som dermed må være stigende i x.

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{x\frac{dC}{dx} - C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[\frac{dC}{dx} - \overline{C}(x; w)\right] = \frac{1}{x} \cdot \overline{C}\left[\frac{1}{\alpha} - 1\right] > 0 \text{ om } \alpha < 1.$$

c) Rett fram fra det som er utledet over.

d)

$$\pi'(x) = p - \frac{dC}{dx} = p - \frac{w}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1} \text{ og}$$

$$\pi''(x) = -\frac{d^2C}{dx^2} = -\frac{w}{\alpha}(\frac{1}{\alpha} - 1) \cdot x^{\frac{1}{\alpha}-2}.$$

For at profitten skal ha et entydig maksimum for et positivt kvantum, må det finnes en verdi av x, kalt x^*, slik at $\pi(x^*) \geqq \pi(x)$for alle $x \geqq 0$, og her bestemt av at $\pi'(x^*) = 0$ og $\pi''(x) < 0$ i omegnen av x^*. Vi ser at vi må kreve at $p \geq 0$ og $\alpha < 1$. Med $\alpha < 1$, ser vi at $\frac{dC(0;w)}{dx} = 0$; dvs. grensekostnaden utregnet for $x = 0$, er lik null. Da fins det et positivt profittmaksimerende kvantum; se punkt f.

e) Med $\alpha = 1$ er $C(x;w) = wx$ (lineær), med grense- og gjennomsnittskostnad som en konstant (uavhengig av x), i og med at $\overline{C}(x;w) = \frac{dC}{dx} = w$. Hvis $p > w$, vil profitten vokse med x, og det over alle grenser bare x vokser over alle grenser. Hvis motsatt $p < w$, vil det ikke lønne seg å produsere i det hele tatt; ethvert kvantum innebærer et tap – optimum er nå gitt ved $x^* = 0$. Hvis tilfeldigvis $p = w$, vil ethvert kvantum gi null profitt.

f) Anta at $\alpha < 1$. Da ser vi at det fins et endelig profittmaksimerende kvantum, bestemt fra $\pi'(x) = p - \frac{w}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ med $\pi''(x) < 0$ som her er oppfylt for alle x. Løser vi ut for kvantum (x), finner vi den oppgitte størrelsen.

g) Vi har allerede funnet følgende profittfunksjon og optimal x:

$$\pi(x) = px - wx^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1}$$

$$x^* = (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2}$$

$$n^* = (x^*)^{\frac{1}{\alpha}} = ((\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}} = (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3}$$

Når vi setter inn x^* for x i profittfunksjonen, får vi profitten som funksjon av prisene:

$$\pi(p,w) = p(\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w((\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}} = p(\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w(\frac{\alpha p}{w})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Nå kommer masse mellomregninger, for å vise at man kan skrive om dette uttrykket på en måte som gjør det litt lettere å se hvordan p påvirker profitten:

Vi trekker først p-leddene ut av parentesene:

$$\pi(p,w) = p^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - p^{\frac{1}{1-\alpha}}w(\frac{\alpha}{w})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Vi vet at $1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, derfor er p opphøyd i det samme, nemlig $\frac{1}{1-\alpha}$ både i det første og det andre leddet i profittfunksjonen. Da kan vi sette $p^{\frac{1}{1-\alpha}}$ utenfor en klamme, slik:

$$\pi(p,w) = p^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[(\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w(\frac{\alpha}{w})^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]$$

Nå vet vi også at $(\frac{\alpha}{w})^{\frac{1}{1-\alpha}} = (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \times (\frac{\alpha}{w})$ (siden $1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$), slik at $(\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ er felles faktor i begge leddene inne i klammen. Dermed kan også $(\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ settes utenfor klammen, slik:

$$\pi(p,w) = p^{\frac{1}{1-\alpha}} (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[1 - w(\frac{\alpha}{w}) \right]$$

I det siste leddet i klammen går w mot w, slik at vi ser at profittfunksjonen til slutt kan skrives slik:

$$\pi(p,w) = p^{\frac{1}{1-\alpha}} (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [1-\alpha] \tag{4}$$

Siden $\frac{1}{1-\alpha}$ er større enn null når α er positiv, men mindre enn 1, som vi har funnet ut at den må være, vil mange allerede nå se at en større p vil gi en større profitt.

For å være helt sikre, deriverer vi profittfunksjonen med hensyn på p, ved å bruke potensregelen:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \pi_1'(p,w) = \frac{1}{1-\alpha} p^{\frac{1}{1-\alpha}-1} (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [1-\alpha] = p^{\frac{1}{1-\alpha}-1} (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\frac{\alpha}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = x^* \tag{5}$$

Den siste likheten følger av (2). $\pi_1'(p,w) > 0$, noe som jo betyr at π øker når p øker. Dermed fikk vi bekreftet det som intuisjonen kanskje sier oss, at profitten vil øke når prisen på varen vi selger øker.

h) Vi vet som sagt fra før at $x^* = (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, og blir bedt om å finne ut hvordan x^* endrer seg når p endrer seg.

Det gjør vi ved å derivere x^* med hensyn på p ved hjelp av kjerneregelen.

Vi definerer først følgende kjerne: $u = \frac{\alpha p}{w}$. Kjerneregelen sier oss da at $\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{\partial x^*}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p}$.

$\frac{\partial x^*}{\partial u} = \frac{\alpha}{1-\alpha} (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}$, og $\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\alpha}{w}$, slik at

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{\alpha}{w} \frac{\alpha}{1-\alpha} (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = \frac{\alpha}{w} \frac{\alpha}{1-\alpha} (\frac{\alpha p}{w})^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \tag{6}$$

som er tre positive faktorer ganget med hverandre.

Den deriverte av x^* med hensyn på p er altså positiv, noe som betyr at optimalt kvantum vil øke, hvir prisen på varen vi selger øker. Da vil det altså bli lønnsomt å produsere mer enn før.

i) La oss her ta utgangspunkt i likning 4, som er profitt-funksjonen. Hvis vi setter inn $\alpha = 0,5$ får vi:

$$\pi(p, w) = p^{\frac{1}{1-0,5}}(\frac{0,5}{w})^{\frac{0,5}{1-0,5}}[1-0,5] = p^2(\frac{1}{2w})\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} \tag{7}$$

Så blir vi bedt om å finne sammenhengen mellom x^* og $\frac{\partial \pi}{\partial p}$. For å finne hva x^*er når $\alpha = 0,5$, setter vi bare $\alpha = 0,5$ inn i likning 2:

$$x^* = (\frac{0,5p}{w})^{\frac{0,5}{1-0,5}} = \frac{p}{2w}$$

For å finne $\frac{\partial \pi}{\partial p}$ er det enklest å bare derivere likning 7 med hensyn på p:

$$\pi'_1(p, w) = 2(\frac{1}{4})(\frac{p}{w}) = \frac{p}{2w}$$

Vi ser altså at de to størrelsene er like.

Dette er ingen tilfeldighet, men kommer av omhyllingsteoremet som dere skal lære om etterhvert. Sydsæter skriver om det på side 520-522 i bind 1.

j) Hva er n^* når $\alpha = 0,5$? Det finner vi ved å sette inn $\alpha = 0,5$ i likning 3.

$$n^* = (\frac{0,5p}{w})^{\frac{1}{1-0,5}} = (\frac{p}{2w})^2$$

Hva er $-\frac{\partial \pi}{\delta w}$? Vi ser at likning 7 kan skrives om slik:

$$\pi(p, w) = \frac{1}{4}p^2 w^{-1}$$

Deretter deriverer vi med hensyn på w og ser etter:

$$\pi'_2(p, w) = (-1)(\frac{1}{4})p^2 w^{-2} = -\frac{1}{4}(\frac{p}{w})^2 = -(\frac{p}{2w})^2$$

Dermed er $-\frac{\partial \pi}{\delta w} = n^*$.

Dette er heller ingen tilfeldighet, men kommer også av omhyllingsteoremet.

Litt om omhyllinsteoremet her, for de som er interessert: Ingen forventer at dere skal forstå dette nå, men det kan kanskje være noe å komme tilbake til når dere skal lære om det. Dette er også en oppgave som illustrerer poenget veldig godt.

Omhyllingsteoremet handler om hvordan den optimale (maksimerte) verdien på en funksjon endrer seg, når en av parametrene i funksjonen endrer seg. Her har vi jo at begge variablene, x og n avhenger av prisen og lønningene. Teoremet sier kort fortalt at på tross av at både kvantum og arbeidskraft avhenger av prisene og lønningene, kan vi partiellderivere den maksimerte profittfunksjonen i stedet for å totalderivere den med hensyn på prisen, når vi ønsker å finne ut hvordan profitten påvirkes av en prisendring. Vi får samme svar om vi totalderiverer, men det er mere arbeid. Jeg skal vise dette senere.

Her har vi altså at

$$\pi(p, w) = px^*(p, w) - wn^*(p, w)$$

Legg merke til at teoremet sier at vi bare kan se bort fra at x^* og n^* avhenger av p når vi skal derivere π med hensyn på p. $\pi_1'(p, w)$ er altså bare den partiellderiverte av funksjonen med hensyn på p, nemlig x^*. Dette kan virke litt merkelig, men vi skal nå se på hva vi får hvis vi totalderiverer uttrykket for profitten med hensyn på p. Da må vi først huske at x^* er en funksjon av n^*. Når vi har bestemt n^* har vi også i prinsippet bestemt x^*, siden $x^* = (n^*)^\alpha$. Vi skriver altså x^* som en generell funksjon av $n^* : x^* = x^*(n^*)$. Slik at profittfunksjonen generelt kan skrives slik:

$$\pi(p, w) = px^*(n^*(p, w)) - wn^*(p, w) \tag{8}$$

Ved hjelp av produktregel og kjerneregel kan vi nå totalderivere (8) med hensyn på p:

$$\pi_1'(p, w) = x^* + p\frac{\partial x^*}{\partial n^*}\frac{\partial n^*}{\partial p} - w\frac{\partial n^*}{\partial p}$$

Dette kan omskrives slik, ved å sette $\frac{\partial n^*}{\partial p}$ utenfor en klamme.

$$\pi_1'(p, w) = x^* + \frac{\partial n^*}{\partial p}\left[p\frac{\partial x^*}{\partial n^*} - w\right] \tag{9}$$

Som vi skal lære om i produksjonsteorien, så vil klammen alltid være lik null i optimum, fordi en arbeidsgiver vil være villig til å ansette nye folk helt til verdien av det den siste ansatte produserer i timen, $p\frac{\partial x^*}{\partial n^*}$, er lik kostnadene knyttet til å ansette ham en time, w.(Når det altså ikke er noe mer profitt å hente på å ansette flere.) Dermed ser vi at hele det siste leddet i den siste likningen faller bort, og vi står, som teoremet sier, tilbake med kun den partielle effekten.

Når vi kjenner omhyllinsteoremet kan vi altså spare oss for en del rekning.