Oppsummeringsforelesning

ECON2200 Vår 2017

Herman Kruse

10. mai 2017

Innledning

- Rekker ikke å oppsummere hele matematikkpensumet idag
- Alt er allikevel pensum, selv om det ikke nevnes idag!

Hovedpunkter - fin sjekkliste til eksamen

- Derivasjon - første- og annenderiverte til funksjoner
- Derivasjonsregler - kjerneregel, produktregel, kvotientregel
- Konveksitet og konkavitet
- Maksimum og minimum uten bibetingelser
- Funksjoner av flere variable
- Logaritmiske funksjoner og eksponentialfunksjoner
- Omhyllingsteoremet
- Maksimum og minimum med bibetingelser - Lagrangemetoden
- Implisitt derivasjon
- Differensialer
- Likningssystemer
- Summer og geometriske rekker

Derivasjon

- Vi definerte den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

- Og vi lærte fundamentale derivasjonsregler...

Derivasjonsregler

- Produktregelen:
  $F(x) = f(x)g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Kvotientregelen: $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Kjerneregelen: $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Eksempler

Produktregelen:

$$F(y) = p(y)y \tag{2}$$
$$F'(y) = p'(y)y + p(y) \tag{3}$$

Kvotientregelen:

$$F(x) = \frac{\ln x}{x} \tag{4}$$
$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \tag{5}$$

Eksempler

Kjerneregelen:

$$F(x) = e^{x^2} \tag{6}$$

$$F(u) = e^u \tag{7}$$

$$u(x) = x^2 \tag{8}$$

$$F'(u) = e^u \tag{9}$$

$$u'(x) = 2x \tag{10}$$

$$F'(x) = F'(u)u'(x) = e^{x^2}2x = 2xe^{x^2} \tag{11}$$

Flere variabler

- Lærte også om partielle deriverte

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} \qquad (12)$$

- Vi deriverer ved F med hensyn på x ved å tenke på y som en konstant...
- Kjerneregelen: $z = F(x,y)$ der $x = f(t,s)$ og $y = g(t,s)$ gir

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x,y)f'_s(t,s) + F'_y(x,y)g'_s(t,s) \qquad (13)$$

Konkavitet og konveksitet

- En funksjon $f(x)$ er:
  - Konveks dersom $f''(x) \geq 0$ for alle x
  - Konkav dersom $f''(x) \leq 0$ for alle x
- Eller dersom $f'(c) = 0$ er:
  - c et minimum dersom
    $f'(x) < 0$ for $x < c$ og $f'(x) > 0$ for alle $x > c$
  - c et maksimum dersom
    $f'(x) > 0$ for $x < c$ og $f'(x) < 0$ for alle $x > c$

Konkavitet og konveksitet II

- En funksjon $F(x, y)$ definert i en konveks mengde S er:
  - Globalt konveks dersom det for alle x, y i S er slik at
    $F_{xx}(x, y) \geq 0$ og
    $F_{yy}(x, y) \geq 0$ og
    $F_{xx}(x, y)F_{yy}(x, y) - (F_{xy}(x, y))^2 \geq 0$
  - Globalt konkav dersom det for alle x, y i S er slik at
    $F_{xx}(x, y) \leq 0$ og
    $F_{yy}(x, y) \leq 0$ og
    $F_{xx}(x, y)F_{yy}(x, y) - (F_{xy}(x, y))^2 \geq 0$
- Og dersom (x_0, y_0) er stasjonærpunkter i det indre av S samtidig som F er globalt konveks (konkav) er (x_0, y_0) et globalt minimum (maksimum) for F.
- Dersom annenderiverttesten kun kan sies å gjelde i (x_0, y_0) (og kun med streng ulikhet) er (x_0, y_0) et lokalt minimum (maksimum) for F.

Implisitte funksjoner

- Noen funksjoner er implisitt definerte gjennom en likning

$$g(f(x), x) = 0 \tag{14}$$

- I økonomi er det ofte en førsteordensbetingelse (for eksempel fremkommet fra $\max_x pf(x) - cx$)

$$pf'(x^*(c)) = c \tag{15}$$

- Kan også fremkomme fra en markedslikevekt:

$$D(p(t)) = S(p(t) - t) \tag{16}$$

- ... eller fra en nivåkurve:

$$f(k(n), n) = x_0 \tag{17}$$

Implisitt derivasjon

Anta at:

$$pf'(x^*(c)) = c \tag{18}$$

og vi deriverer likningen med hensyn på argumentet c, fordi vi lurer på hva som skjer med etterspørselen etter innsatsfaktoren x når enhetskostnadene c øker.

$$pf''(x^*)\frac{dx^*}{dc} = 1 \tag{19}$$

$$\frac{dx^*}{dc} = \frac{1}{pf''(x^*)} < 0 \tag{20}$$

Ulikheten fremkommer av at vi vet at $f''(x^*) < 0$ for indre løsning. Dermed vet vi at når enhetskostnadene går opp, vil bedriften etterspørre mindre innsatsfaktor i optimum.

Lagrange-metoden

- Maksimeringsproblemet:

$$\max_{x,y} f(x, y) \tag{21}$$
$$\text{slik at } g(x, y) = 0 \tag{22}$$

- Gir Lagrange-funksjonen:

$$\mathfrak{L} = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 0) \tag{23}$$

- Og vi finner stasjonærpunktene:

$$\mathfrak{L}_x = f_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0 \tag{24}$$
$$\mathfrak{L}_y = f_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0 \tag{25}$$

- Som sammen med $g(x, y) = 0$ implisitt definerer løsningen for (x, y, λ).

Omhyllingsteoremet uten bibetingelse

- Funksjonen $f^*(r)$ er definert som et maksimum

$$f^*(r) = \max_x f(x, r) = f(x^*(r), r) \tag{26}$$

(Kan også være et min-problem)

- Her vil optimal x avhenge av r. Når vi skal derivere $f^*(r)$ sier omhyllingsteoremet at vi kan ignorere effekten r har på x:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r}(x^*(r), r) \tag{27}$$

- Vi kan bevise dette nokså raskt:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx^*}{dr} = \frac{\partial f}{\partial r} + 0\frac{dx^*}{dr} \tag{28}$$

$$\text{Fordi: } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ som er førsteordensbetingelsen} \tag{29}$$

Omhyllingsteoremet med bibetingelse

- Anta at $f^*(r, s)$ er definert som et maksimum (eller minimum) med bibetingelse:

$$f^*(r,s) = \max_{x,y} f(x,y,r,s) \text{ slik at } g(x,y,r,s) = 0 \tag{30}$$

- Det gir Lagrange-problemet:

$$\mathfrak{L} = f(x,y,r,s) - \lambda(g(x,y,r,s) - 0) \tag{31}$$

- Da sier omhyllingsteoremet at:

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \tag{32}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial s} \tag{33}$$

Eksempler

Shepards Lemma: Anta at vi skal minimere faktorutlegget $c(x, w, q) = \min_{k,n} wn + qk$ til en gitt isokvant $f(n, k) = x$. Vi vil altså finne faktorkombinasjonen som gir lavest mulig utlegg for å produsere x med teknologien $f(n, k)$. Vi får:

$$\mathfrak{L}(n, k; x, w, q) = wn + qk - \lambda(f(n, k) - x) \tag{34}$$

Førsteordensbetingelsene og isokvanten vil definere implisitt de betingede faktoretterspørselsfunksjonene. Men kan vi finne dem enklere? Hva om vi spør:

- Hva skjer med kostnadsfunksjonen dersom w endres litt?
- Hva skjer med kostnadsfunksjonen dersom q endres litt?

Svaret ved bruk av omhyllingsteoremet:

$$c_w^* = \mathfrak{L}_w' = n \tag{35}$$
$$c_q^* = \mathfrak{L}_q' = k \tag{36}$$

Logaritmer og eksponentialfunksjoner

- Vi lærte at $e^{\ln x} = x$ og at $\ln(e^x) = x$
- e og ln har noen fine egenskaper

$$\ln(ax^b) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln a + b \ln x \tag{37}$$
$$e^{a+b\ln x} = e^a x^b \tag{38}$$

- Men husk at:

$$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b \tag{39}$$

- Og vi kan derivere logaritmer og eksponentialer:

$$f(x) = \ln h(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{h(x)} h'(x) \tag{40}$$
$$g(x) = e^{h(x)} \Rightarrow g'(x) = e^{h(x)} h'(x) \tag{41}$$

Summer og geometriske rekker

- Summen av de første n leddene i en geometrisk rekke

$$S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} ak^i \tag{42}$$

- Husker at vi kunne finne en formel. Gang med k:

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 \ldots + ak^n \tag{43}$$

- Så kan vi subtrahere $S_n - kS_n$ og få:

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} \\ &\qquad - (ak + ak^2 + ak^3 \ldots + ak^n) = a - ak^n \\ (1-k)S_n &= a - ak^n & (44) \\ S_n &= a\frac{1-k^n}{1-k} & (45) \end{aligned}$$

Summer og geometriske rekker II

- De n første tallene i tallrekken:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^{n} i \qquad (46)$$

- Summen er endelig, så vi kan skrive den "begge veier":

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (47)$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \qquad (48)$$

- Kan summere "verikalt":

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots \\ &\quad + ((n-2)+3) + ((n-1)+2) + (n+1) \\ 2S_n &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ ganger}} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1) \qquad (49)$$

Noen tips

- Strukturer arket og utregningene dine! Mange roter særdeles mye på arket, og det gir slurvefeil.
- Les oppgaven nøye før du starter. Det er dumt å tape poeng fordi du ikke leste oppgaven godt nok.
- Svar kun på det som spørres etter. Det er ikke ekstrapoeng for å svare på ting du ikke blir spurt om, snarere motsatt.
- Sørg for at du får alle poengene på de oppgavene du vet du kan. Ikke bruk opp tida på et delspørsmål du står fast på.
- Vis sensor hva du mener! Bruk formler hvis det spørres etter, forklar gjerne mellomregninger, forklar figurer dersom du bruker det.
- Send meg e-post dersom det skulle være noe, jeg svarer så fort jeg kan. Vi kan avtale treffetider dersom det er nødvendig.

LYKKE TIL!

(Lagrange heier på dere alle!)