Jon Vislie; april 2017
ECON 2200 – 2017

Prosedyre for oppgaveløsning

Vi skal nå, som i den forrige prosedyren se nærmere på hvordan vi kan løse en oppgave hentet fra konsumentens tilpasning. Igjen er vi opptatt av å finne en vei gjennom problemet og se hva vi kan eller skal gjøre på ethvert trinn.

Problem 2: Konsumenttilpasning

Betrakt en konsument med en nyttefunksjon over to varer gitt ved $U(x,y) = (x-c)^a y^b$ der a,b er positive konstanter, c er et «minstekonsum» av $x-$varen, (x,y) er konsumerte mengder av de to varene som kjøpes til (for konsumenten) gitte priser (p,q) kroner per enhet av hhv. x-varen og y-varen. Konsumenten har en gitt inntekt m. Vi antar at $m > pc$.

Spørsmål: Utled tilpasningen til konsumenten når nyttemaksimering er målet.

Hva er problemet? Jo, problemet er å velge det konsumpar (godevektor) som maksimerer nytten gitt budsjettbetingelsen: $px + qy = m$.

Hvordan skal vi løse dette problemet? Vi kan løse det ved Lagranges metode og danner da Lagrangefunksjonen, med λ som Lagrangemultiplikator:

$L(x,y,\lambda) = (x-c)^a y^b - \lambda\left[px + qy - m\right]$.

Vi leter da opp (ved indre løsning; $y > 0, \quad x > c$) stasjonærpunktene til denne Lagrangefunksjonen, gitt som (bruker regler for derivasjon og potensregning):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = a(x-c)^{a-1} y^b - \lambda p = 0 \Leftrightarrow a\frac{U}{x-c} - \lambda p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = b(x-c)^a y^{b-1} - \lambda q = 0 \Leftrightarrow b\frac{U}{y} - \lambda q = 0$$

Disse to betingelsene, sammen med budsjettbetingelsen, danner et system bestående av tre likninger mellom tre (endogene) ukjente variable: x, y, λ, med (p,q,m) som eksogene størrelser. Vi kan eliminere λ, som vi ikke her skal bruke, siden vi fra de to førsteordensbetingelsene har: $a\dfrac{U}{p(x-c)} = b\dfrac{U}{qy} = \lambda$. Bruk den første av disse likhetene til å utlede: $\frac{p(x-c)}{qy}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow bp(x-c)=aqy$ som vi så kan bruke i budsjettbetingelsen for å løse ut for x eller y som funksjoner av priser og inntekt – dvs. de *ordinære* etterspørselsfunksjonene.

Tilpasnings- eller tangeringsbetingelsen kan dermed skrives som: $px=pc+\frac{a}{b}qy$, som vi kan sette inn i budsjettbetingelsen. Da finner vi:

$px+qy=m\Leftrightarrow\frac{a}{b}qy+pc+qy=qy(1+\frac{a}{b})+pc=m$, som vi kan løse for

$y=\frac{m-pc}{q(1+\frac{a}{b})}=\frac{m-pc}{q\,\frac{b+a}{b}}=\frac{b(m-pc)}{(a+b)q}$. (Vi ser at forutsetningen $m>pc$ sikrer at $y>0$.)

Bruker vi denne i $px=pc+\frac{a}{b}qy$, så finner vi:

$x=c+\frac{a}{b}\frac{q}{p}y=c+\frac{a}{b}\frac{q}{p}\frac{b(m-pc)}{(a+b)q}=c+\frac{a(m-pc)}{(a+b)p}=\frac{(a+b)pc+am-apc}{(a+b)p}$ som kan skrives: $x=\frac{a}{(a+b)p}m+\frac{b}{a+b}c$.

Normalt er vi nå opptatt av å karakterisere disse etterspørselsfunksjonene, samt andre egenskaper ved tilpasningen. Her er noen problemstillinger:

Problemer: Hvordan varierer etterspørselen med endringer i priser og inntekt?

1. Hva skjer om $pc\rightarrow m$?
2. Gitt $m>pc$, hvordan varierer etterspørselen etter de to varene om inntekten øker?
3. Hvordan påvirkes etterspørselen om p øker?
4. Hva skjer med etterspørselen om prisene og inntekten dobles?
5. Hva blir varenes budsjettandeler? Kan du si noe om hvorvidt varene er priselastiske eller prisuelastiske i etterspørselen; eller hvorvidt de, ved å se på sammenhengen mellom etterspurt mengde og inntekt, kan karakteriseres som luksusgoder eller nødvendighetsgoder?
6. Kan en beregne substitusjonsvirkningene av en økning i p på bakgrunn av det som så langt har vært utledet? Gjør dette for $c=0$.

Spørsmål 1: Vi ser at når utlegget til minstekonsum av x-varen akkurat dekkes av inntekten, vil $y = 0, x = c$.

Spørsmål 2: Vi kan da se på de inntektsderiverte eller Engel-elastisiteter. Her de deriverte: $\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{b}{(a+b)q} > 0$, $\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{a}{(a+b)p} > 0$. Begge varene er fullverdige i etterspørselen. Engelelastisitetene er:

$$E_y = \frac{m}{y}\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{m}{\frac{b(m-pc)}{(a+b)q}} \cdot \frac{b}{(a+b)q} = \frac{(a+b)mq}{b(m-pc)} \cdot \frac{b}{(a+b)q} = \frac{m}{m-pc} > 1$$

Denne varen er derfor et luksusgode, målt ved størrelsen på inntekts- eller Engelelastisiteten; etterspurt mengde øker relativt mer enn inntekten.

$$E_x = \frac{m}{x}\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{m}{\frac{(a+b)pc+am-apc}{(a+b)p}} \cdot \frac{a}{(a+b)p} = m\frac{(a+b)p}{am+pbc} \cdot \frac{a}{(a+b)p} = \frac{am}{am+bpc} < 1$$

Denne varen er derfor en nødvendighetsvare, målt ved størrelsen på inntektselastisiteten; etterspurt mengde øker relativt mindre enn inntekten. (Med to varer og når en av varene har Engelelastisitet større enn én, da må den andre varen ha Engelelastisitet mindre enn én.)

Spørsmål 3: Vi kan da se på de prisderiverte: $\frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{bc}{(a+b)q} < 0$, og $\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{am}{(a+b)p^2} < 0$. Når prisen på x-varen øker, går etterspørselen etter begge varer ned. Vi kan også se på Cournotelastisitetene:

$$e_{xp} = El_p x = \frac{p}{x}\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{p}{x} \cdot \frac{am}{(a+b)p^2} = -\frac{a}{a+b}\frac{m}{px} = -\frac{a}{a+b}\frac{1}{\alpha_x}$$

der $\alpha_x := \frac{px}{m}$ er x-varens budsjettandel.

Tilsvarende for y-varen:

$$e_{yp} = El_p y = \frac{p}{y}\frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{p}{y} \cdot \frac{bc}{(a+b)q} = -\frac{b}{a+b}\frac{pc}{qy} = -\frac{b}{a+b}\frac{\frac{pc}{m}}{\frac{qy}{m}} = -\frac{b}{a+b}\frac{\frac{pc}{m}}{\alpha_y} < 0.$$

Spørsmål 4: Om vi nå multipliserer prisene og inntekten med tallet 2, ser vi at etterspørselen etter de to varene er upåvirket. De ordinære etterspørselsfunksjonene er homogene av grad null i priser og inntekt.

Spørsmål 5: Vi har budsjettandelene $\alpha_x = \frac{px}{m}, \alpha_y = \frac{qy}{m}$. Bruker vi etterspørselsfunksjonene, ser vi at $\alpha_x = \frac{px}{m} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\frac{pc}{m}$, som er stigende i prisen p og synkende i inntekten m. Når p øker, må dette bety at utlegget til x-varen, px stiger; varen er med andre ord *prisuelastisk*. Videre ser vi at α_x synker med inntekten. Med positiv inntektsderivert betyr dette at x-varen er et nødvendighetsgode (ikke et luksusgode som ville ha oppvist en positiv sammenheng mellom budsjettandel og inntekt, som vist over). Siden vi har vist at $\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{a}{(a+b)p} > 0$, er x-varen **ikke** mindreverdig.

$\alpha_y = \frac{qy}{m} = \frac{1}{m}\frac{b(m-pc)}{a+b} = \frac{b}{a+b} - \frac{bpc}{(a+b)m}$ som er voksende i inntekten m; $y-$varen har derfor karakter av å være et luksusgode.

Spørsmål 6: Vi har at Slutskylikningen på elastisitetsform er $e_{xp} = S_{xp} - \alpha_x E_x$, der S_{xp} er den direkte Slutskyelastisiteten for x-varen.

Vi kan da, ved å sette inn våre tidligere resultater for disse elastisitetene, finne eksplisitte uttrykk for disse Slutskyelastisitetene. Også $S_{yp} = e_{yp} + \alpha_x E_y$ kan beregnes.

La oss gjøre det når vi setter $c = 0$. Da har vi: $E_x = 1$, $\alpha_x = \frac{a}{a+b}$ (som må være konstant siden $E_x = 1$; hvorfor?) og fra tidligere $e_{xp} = -\frac{a}{a+b}\frac{1}{\alpha_x} = -1$ (nøytralelastisk etterspørsel). Da følger: $S_{xp} = e_{xp} + \alpha_x E_x = -1 + \frac{a}{a+b} = -\frac{b}{a+b} < 0$. Videre, siden vi nå har $e_{yp} = 0$, og $E_y = 1$, må vi ha at: $S_{yp} = e_{yp} + \alpha_x E_y = 0 + \frac{a}{a+b} \cdot 1 = \frac{a}{a+b} > 0$. Varene er med andre ord substitutter målt etter fortegnet på kryss-slutskyelastisiteten.

Problem 3: «Selvetterspørsel»
Vi skal nå se på en problemstilling som er relevant også for tilbud av arbeid (jfr. oppgave 10 i kap. 4 i SS&JV). Mens den vanlige konsumentteorien ensidig legger vekt på kjøp, kan den også brukes til å se på problemer der konsumenten eier noe av en vare som kan omsettes i et marked. Hva skjer da om prisen på denne varen, som konsumenten selv kan konsumere noe av, øker? Dette kan være relevant som bakgrunn for å se på de nye plattformene som åpner for mer «delingsøkonomi.

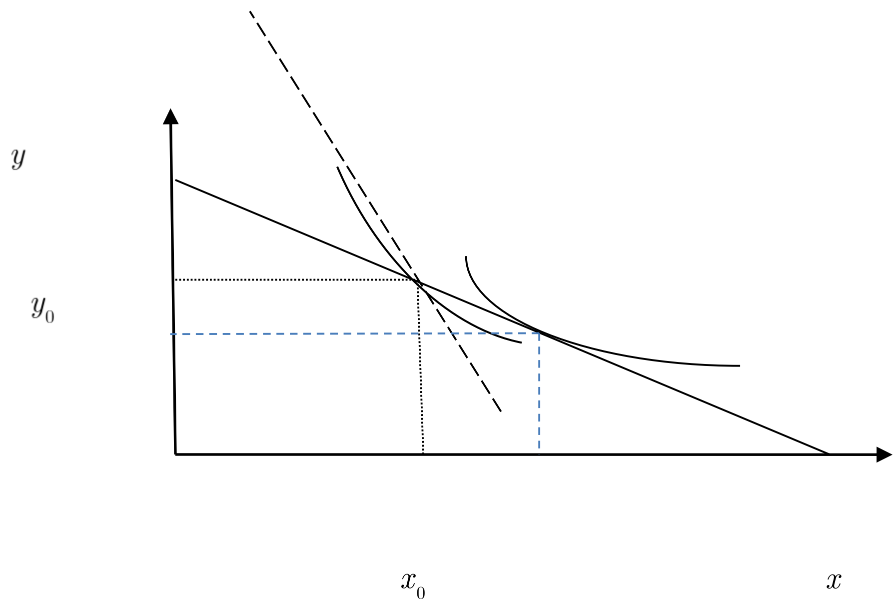
Eksempler: Du eier et hus som du kan beregne en leiepris for og som kan leies ut (i hvert fall deler av huset). Hva skjer om leieprisen øker? Du har en beholdning av eksklusive viner som du av og til nyter, men som kan selges i et marked for slike viner. Hva skjer med ditt forbruk om vinprisen øker? Samme med arbeid versus fritid slik vi har fremstilt dette i boka.

Sett at en husholdning har en viss mengde av to varer initialt og la kvanta av de to varene som forbrukes være x og y. Konsumenten har en beholdning – en eierrettighet – svarende til x_0 enheter av x-varen, og y_0 enheter av y-varen i utgangspunktet. Dette gir oss et punkt i godediagrammet, og vil i den modellen vi ser på, gi «inntekten» til husholdningen som markedsverdien av eierrettigheter.

Hvis vi ikke hadde hatt muligheter for å bytte i markedet, ville vi ha vært tvunget til å konsumere maksimalt disse mengdene av de to varene. (Kjennetegn på en naturalhusholdning uten markedsadgang.)

Sett at vi har «vanlige» preferanser for de to varene gitt ved nyttefunksjonen $U(x,y)$; strengt voksende og med avtakende MSB; dvs. med indifferenskurver som krummer mot origo.

Siden vi har mulighet til å konsumere akkurat denne initiale beholdningen, må budsjettlinjen – uansett prisforhold – gå gjennom dette punktet. Byttemuligheter i et marked utvider konsummulighetene; nytten kan ikke bli lavere enn om husholdningen måtte leve i isolasjon (autarki). Hvis prisene er hhv p og q, har vi at «inntekten» - lik formuen – siden vi har kun én periode – være gitt som $m := px_0 + qy_0$. Tegner vi da inn en budsjettlinje, for et gitt prisforhold, gjennom initialpunktet, vil vi ha:



Tallverdien til stigningstallet til budsjettlinjen er $\frac{-dy}{dx} = \frac{p}{q}$; markedsbytteforholdet.

Det som er avgjørende for hva vi vil selge og hva vi vil kjøpe er avhengig av hvordan mitt subjektive bytteforhold i punktet (x_0, y_0); dvs. reservasjonsprisen $MSB(x_0, y_0)$ forholder seg til markedsbytteforholdet $\frac{p}{q}$.

Hvis «reservasjonsprisen» for x-varen, $MSB(x_0, y_0) > \frac{p}{q}$, som illustrert i figuren, slik at indifferenskurven gjennom (x_0, y_0) er brattere enn budsjettlinjen, vil jeg ønske å selge noe av min y-beholdning for å finansiere kjøp av x-varen, slik at jeg får et høyere nyttenivå enn i utgangspunktet. Ved å selge en enhet av y-varen, vil jeg kunne skaffe meg flere enheter av x-varen enn hva jeg må ha i kompensasjon for å kunne holde samme nyttenivå som i utgangspunktet.

Tilpasningen er igjen bestemt av to betingelser; tangeringsbetingelsen og budsjettbetingelsen:

$$MSB(x, y) = \frac{p}{q} \quad \text{og} \quad px + qy = px_0 + qy_0 := m$$

Disse gir oss to likninger til å bestemme forbruk av de to varene; dvs. fastlegger de to etterspørselsfunksjonene: $x(p,q,px_0+qy_0)$ og $y(p,q,px_0+qy_0)$, og dermed nettotilbud av hhv. nettoetterspørsel etter varene; y_0-y, som nettotilbud av y-varen, og $x-x_0$ som nettoetterspørsel etter x-varen.

Vi legger merke til at når en pris endres, vil det de facto skje en «formues-endring» i tillegg til den rene prisendringen. I tillegg til tradisjonelle inntekts- og substitusjonseffekter av en prisendring, får vi også med en «formues-effekt». Se den nye stiplede prislinjen i figuren. (Vi ser i figuren at om prisen på den varen som vi er nettokjøper av, øker, blir vi «fattigere». Og motsatt, om prisen på den varen vi selger øker, blir vi «rikere».)

La oss se hvordan en økning i p dermed kan analyseres.

Vi ser da på den **totalderiverte** siden p inngår separat i to argumenter i den ordinære etterspørselsfunksjonen for x-varen:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p}=\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial x}{\partial m}x_0$$

Bruker vi nå Slutskylikningen – på derivertform – som: $\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial h_x}{\partial p}-x\frac{\partial x}{\partial m}$; med vanlige substitusjons- og inntektseffekter av en prisøkning, der $h_x(p,q,u)$ er kompensert etterspørsel etter x-varen, ser vi at:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\partial x}{\partial p}+x_0\frac{\partial x}{\partial m}=\underset{SE}{\frac{\partial h_x}{\partial p}}\underbrace{-x\frac{\partial x}{\partial m}}_{IE}+\underbrace{x_0\frac{\partial x}{\partial m}}_{FE}=\frac{\partial h_x}{\partial p}-(x-x_0)\frac{\partial x}{\partial m}$$

Substitusjonseffekten (SE) er negativ: Den direkte substitusjonseffekten er negativ med avtakende MSB.

IE er negativ hvis x-varen er fullverdig som antas.

Formues-effekten (FE) er positiv – vi blir de facto rikere; og med fullverdig vare, vil vi ønske å forbruke mer.

Netto-effekten $FE - IE$ er avhengig av om vi er netto-kjøper eller netto-selger av x-varen.

Hvis vi er netto-kjøper av x-varen, med $x > x_0$, slik som i figuren, og x-varen er fullverdig, vil alle effektene trekke i samme negative retning. Etterspørselen etter x går helt sikkert ned. Varen blir relativt dyrere, samtidig som vi får lavere kjøpeevne.

Hvis vi skulle være nettoselger av den fullverdige x-varen ($x < x_0$), vil SE og den samlede inntekts- og formues-effekten gå i hver sin retning. Den samlede effekten er dermed ikke entydig bestemt.

La oss se på problemet med en spesifisert eller eksplisitt nyttefunksjon..

Anta at $U(x,y) = y + \theta \ln x$ og la $m := px_0 + qy_0$, slik som over. Anta at $y_0 + \frac{p}{q}x_0 > \theta$.

1. Utled nå betingelser for optimal konsumsammensetning og vis hvordan etterspørselen etter de to varene varierer med p.
2. Fastlegg de to varenes budsjettandeler.
3. Deretter skal du se hva som skjer om y_0 øker.
4. Tilslutt; hva skjer med tilpasningen om $x_0 = 0$?

Svar 1: Vi danner da Lagrangefunksjonen $L = y + \theta \,\mathrm{lnx} - \lambda(px + qy - px_0 - qy_0)$

En optimal (indre) løsning må oppfylle:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\theta}{x} - \lambda p = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda q = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{q}$, slik at $\frac{\theta}{x} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow x = \theta \frac{q}{p}$ eller $px = \theta q$. Sett denne betingelsen inn i budsjettbetingelsen: $\theta q + qy = px_0 + qy_0 \Rightarrow y = y_0 - \theta + \frac{p}{q}x_0$.

Etterspørselen etter x-varen er kun avhengig av prisforholdet, mens etterspørselen etter y-varen avhenger av prisforhold og initiale eierrettigheter (inntekt).

Høyere p: $\dfrac{\partial x}{\partial p} = -\dfrac{\theta q}{p^2} = -\dfrac{x}{p} \Rightarrow e_{xp} = -1$, samt $\dfrac{\partial y}{\partial p} = \dfrac{x_0}{q} \Rightarrow e_{yp} = \dfrac{p}{y}\dfrac{x_0}{q} = \dfrac{px_0}{qy_0 + px_0 - \theta}$.

Svar 2: Budsjettandeler: $\alpha_x = \dfrac{px}{m} = \dfrac{\theta q}{px_0 + qy_0}$ og $\alpha_y = \dfrac{qy}{px_0 + qy_0} = \dfrac{px_0 + qy_0 - q\theta}{px_0 + qy_0}$.

Svar 3: Økt initial tilgang av $y-$varen; dvs. y_0 øker, gir: $\dfrac{\partial x}{\partial y_0} = 0$ og $\dfrac{\partial y}{\partial y_0} = 1$.

Svar 4: $x_0 = 0 \Rightarrow$ $x-$etterspørselen er upåvirket (kjøper det samme kvantum uansett inntekt), y reduseres til $y_0 - \theta$, og vi har da $\dfrac{\partial y}{\partial p} = 0$.